Cours d'Analyse.

2ème. Division.

1ère. année

1847–1848.

1ère Leçon.

On appelle quantité constante une quantité qui pendant tout le cours d'un calcul conserve la même valeur; et on appelle quantité variable une quantité qui prend différentes valeurs dans le même calcul.

Ainsi dans l'équation d'une parabole $y^2 = 2px$, le paramètre p est une quantité constante, et les quantités variables sont l'abscisse et l'ordonnée de chaque point de la parabole.

Une quantité peut être dans le cours du même calcul d'abord constante ensuite variable.

On appelle <u>variable</u> <u>indépendante</u>, une quantité à laquelle on donne des valeurs arbitraires depuis une quantité a jusqu'à b.

La variable indépendante étant désignée par x, on dit qu'une quantité est fonction de x, lorsque cette quantité dépend de la variable x, et varie quand x varie.

On se sert pour indiquer cette dépendance des lettres f, F, φ, ψ etc.

Une quantité peut dépendre de plusieurs variables, x, y, z etc. On dit alors que c'est une fonction à plusieurs

variables.

Quand une quantité dépend d'une variable qui n'est pas indépendante, on dit que cette quantité est une fonction de fonction. Ainsi soit $y = f(x)$ et supposons que x soit une fonction d'une variable indépendante u. $x = F(u)$, la quantité y est appelée une fonction de fonction, et il est clair que y varie quand la variable indépendante u varie elle-même.

Une fonction peut être réelle ou imaginaire.

Une fonction réelle peut être continue ou discontinue.

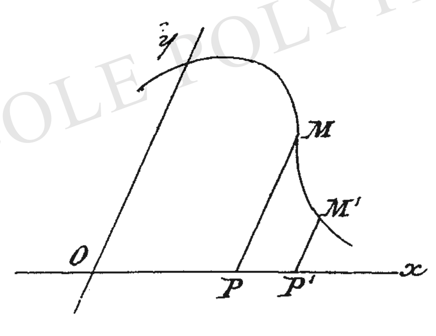
La fonction est continue quand elle a constamment une valeur finie, et qui varie par degrés insensibles, quand la variable x varie d'une manière continue; en d'autres termes quand en donnant à x des accroissements suffisamment petits, la variation de la fonction peut être rendue plus petite que toute quantité donnée.

Dans le cas contraire, la fonction est discontinue.

A moins que l'on n'avertisse expressément du contraire, les fonctions considérées seront toujours supposées continues.

En outre, parmi les fonctions discontinues on ne s'occupera jamais de celles qui le sont constamment, comme le serait, par exemple, la fonction d'x qui serait nulle quand x est rationnel, et égale à l'unité quand x est irrationnel.

Une fonction réelle peut être représentée par une courbe plane. Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable x: et pour $y = f(x)$. Traçons sur un plan deux axes Ox et Oy faisant entre eux un angle quelconque et considérons x comme l'abscisse et y comme l'ordonnée



d'un même point du plan. Pour cela, donnons à x une valeur numérique arbitraire et portons à partir du point O sur l'axe Ox, et dans un sens convenable, une longueur OP telle que son rapport à l'unité de longueur soit égale à la valeur absolue d'x.

Sur une parallèle PM à l'axe Oy, portons de même dans un sens convenable une longueur à y. Nous déterminerons ainsi un point M de la courbe dont l'équation est $y = f(x)$, de même pour un second point M' etc.

Si la fonction est continue, on aura ainsi une successivement des points aussi rapprochés que l'on voudra et dont l'ensemble constitue la courbe dont l'équation est $y = f(x)$.

Si la fonction est discontinue, par exemple, si elle ne conserve pas toujours une valeur finie, cela correspond au cas où la courbe a une asymptote parallèle à l'axe des y. Si la fonction passe brusquement d'une valeur à une autre valeur essentiellement différente de la première, la courbe s'arrête brusquement en un point A, et une seconde branche part du point B.

On suppose, pour avoir une idée plus exacte de la courbe, de lui mener une tangente

par un point pris sur cette courbe. C'est en résolvant ce problème qu'on est conduit au calcul différentiel.

On appelle tangente à une courbe, la limite des positions d'une sécante qui tourne autour d'un de ses points de section, jusqu'à ce qu'un second point vienne se réunir au premier.

Soit donc $y = f(x)$ et supposons les axes rectangulaires. Soit ST la tangente au point M, et MM' une sécante quelconque passant par le point M.

$MP = y$ $OP = x$ $PP' = h$

$M'I = K$. On a

$$y + K = f(x+h) = M'P'.$$

Dans le triangle rectangle $M'MI$ on a :

$$tg. M'MI = \frac{M'I}{MI} = \frac{K}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

L'angle $M'M$ détermine la position de la sécante ; celle de la tangente TS sera connue quand on saura vers quelle limite tend le rapport $\frac{K}{h}$ quand h tend vers zéro, ou en d'autres termes, quand h est infiniment petit.

C'est de la recherche de cette limite que nous nous occuperons.

Soit $f(x) = A x^m$, m étant entier et positif

$$f(x+h) = A (x+h)^m$$

$$f(x+h) - f(x) = A \left\{ (x+h)^m - x^m \right\} =$$

$$A \left\{ m x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} h^2 + \cdots \right\}. \text{ Donc}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A \left\{ m x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} h + \text{etc} \right\}$$

Quand h tend vers zéro, la parenthèse tend indéfiniment vers mx^{m-1}, car tous les termes qui suivent celui-là contiennent le facteur h, ils sont en nombre fini, et le nombre ne varie pas quand h diminue. On a donc $\lim.\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = mAx^{m-1}$.

Cette limite est indépendante de la manière dont on fait varier h pour le faire tendre vers zéro. Cette limite quand elle existe s'appelle *fonction dérivée* ou *dérivée* de la fonction $f(x)$, et elle se représente par $f'(x)$.

Soit $f(x)$ une fonction d'x. Soit h l'accroissement de la variable x. On forme le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ qui est le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement correspondant de la variable : la limite de ce rapport quand h tend vers zéro, ou devient infiniment petit, c'est ce qu'on appelle la dérivée de $f(x)$.

En général, nous reconnaîtrons que cette limite existe, et qu'elle ne dépend pas de la manière dont h tend vers zéro, ni de son signe pendant son décroissement.

Cette définition s'étend aux fonctions imaginaires. $f(x) = f_1(x) + \sqrt{-1}\, f_2(x)$. On forme le rapport :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h} + \sqrt{-1}\,\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}.$$

On cherche la limite de la partie réelle, et la limite du coefficient de $\sqrt{-1}$, et l'on aura :

$$f'(x) = f_1'(x) + \sqrt{-1}\, f_2'(x).$$

Nous supposerons la variable réelle : si elle était imaginaire de la forme $p + q\sqrt{-1}$, on aurait une fonction de deux variables p et q.

Quand la fonction se réduit à une constante sa dérivée

est nulle, cela résulte immédiatement de la définition. Ainsi si $f(x) = \text{const.}$ on a $f'(x) = 0$.

Cela est également vrai pour les fonctions imaginaires: car soit $f(x) = f_1(x) + \sqrt{-1}\, f_2(x)$ si $f_1(x) = \text{const.}$ et $f_2(x) = \text{cons.}$ alors $f_1'(x) = 0$ et $f_2'(x) = 0$ et par conséquent $f'(x) = 0$.

Dans le cas particulier où $f_2(x) = \text{const.}$ la dérivée de $f(x)$ est réelle.

Soit $f(x)$ une fonction supposée réelle: on a

$$f'(x) = \lim. \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$. Par conséquent

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \varepsilon$$

ε étant une quantité qui tend vers zéro quand h tend lui-même vers zéro. Donc

$$f(x+h) - f(x) = h \left\{ f'(x) + \varepsilon \right\}$$

On dit qu'une fonction est croissante quand sa variation est de même signe que celle de la variable; elle est dite décroissante dans le cas contraire.

Supposons que $f'(x)$ soit constamment positif pour toutes les valeurs d'x comprises entre a et b, je dis que $f(x)$ est croissante pour ces mêmes valeurs. En effet, on peut prendre h assez petit pour que le signe de la parenthèse soit celui de $f'(x)$. Il suit de là que si h est positif $f(x+h)$ est plus grand que $f(x)$, et si h est négatif le contraire a lieu. Donc la fonction est croissante.

Si $f'(x)$ est négatif, pour toutes les valeurs d'x comprises entre a et b, la fonction $f(x)$ est décroissante pour les mêmes valeurs.

Quand la dérivée est constamment nulle pour

toutes les valeurs d'x comprises entre a et b, la fonction est constante pour toutes ces valeurs.

Soient x et x_1 deux valeurs quelconques de la variable comprises entre a et b. Je dis que : $f(x) = f(x_1)$. Je considère m quantités comprises entre x et x_1, et en posant $mh = x_1 - x$, ces quantités sont :

$$x+h,\ x+2h,\ x+3h,\ x+(m-1)h,\ x_1,$$

En vertu de l'équation générale

$$f(x+h) - f(x) = h\left\{f'(x) + \varepsilon\right\}$$

on a, puisque $f'(x)$ est constamment nulle :

$$f(x+h) - f(x) = h\varepsilon_1$$

$$f(x+2h) - f(x+h) = h\varepsilon_2$$

$$f(x+3h) - f(x+2h) = h\varepsilon_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x_1) - f(x+\overline{m-1}\,h) = h\varepsilon_m.$$

En ajoutant membre à membre, on a :

$$f(x_1) - f(x) = h(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots\cdots + \varepsilon_n).$$

Soit ε la plus grande de toutes les quantités représentées par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ etc. On a :

$$f(x_1) - f(x) < h.m\varepsilon \text{ ou } f(x_1) - f(x) < mh.\varepsilon.$$

Mais $m.h = x_1 - x$ donc :

$$f(x_1) - f(x) < (x_1 - x)\,\varepsilon.$$

Le premier membre est une quantité constante, qui ne varie pas quand on augmente : il en est de même de $x_1 - x$, mais ε a pour limite zéro quand m croît indéfiniment. Il suit de là que le premier membre de le premier membre de l'inégalité est nécessairement nul, puisqu'il est constamment moindre qu'une quantité qui s'approche indéfiniment de zéro. Donc $f(x_1) = f(x)$. Ce qu'il fallait démontrer.

Cette démonstration suppose que la fonction est réelle. Le théorème s'étend aux fonctions imaginaires.

Soit $f(x) = f_1(x) + \sqrt{-1}\, f_2(x)$. Si $f'(x) = 0$. Je dis que $f(x) = \text{const}$. En effet :

$f'(x) = f_1'(x) + \sqrt{-1}\, f_2'(x)$. Donc :

$f_1'(x) = 0$ et $f_2'(x) = 0$. Donc d'après le théorème démontré $f_1(x) = \text{const}$. et $f_2(x) = \text{const}$. Donc $f(x) = \text{const}$.

Si deux fonctions, pour toutes les valeurs d'x comprises entre a et b, ne diffèrent que par une constante, leurs dérivées sont égales pour ces valeurs d'x.

Soient x et $x+h$ deux valeurs de la variable comprise entre a et b ; on a par hypothèse :

$$f(x) = F(x) + C$$

$$f(x+h) = F(x+h) + C$$

d'où l'on tire :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Ces deux quantités sont égales pour toutes les valeurs de h : donc leurs limites sont égales. Donc $f'(x) = F'(x)$.

<u>Si les dérivées de deux fonctions sont égales entre elles, pour certaines valeurs de x, ces fonctions ne peuvent pour les mêmes valeurs différer que par une constante.</u>

Soit $\varphi(x)$ la différence entre les deux fonctions :

$f(x) = F(x) + \varphi(x)$ et

$f(x+h) = F(x+h) + \varphi(x+h)$ d'où l'on tire

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

Égalité qui a lieu quelque petit que soit h. Par suite, en passant à la limite : $f'(x) = F'(x) + \varphi'(x)$. Mais

par hypothèse $f'(x) = F'(x)$. Donc $\varphi'(x) = 0$, et par suite $\varphi(x) = const$.

Soit $f(x)$ une fonction d'une variable indépendante x. De la définition de la dérivée, on déduit :
$f(x+h) - f(x) = h\left\{f'(x) + \varepsilon\right\} = h f'(x) + \varepsilon h.$
L'accroissement de la fonction se compose ainsi de deux parties ; la première de ces parties, savoir $h f'(x)$ est appelée la différentielle de $f(x)$. Ainsi la différentielle d'une fonction est le produit de la dérivée de cette fonction par l'accroissement arbitraire de la variable indépendante. On voit donc que la différentielle d'une fonction n'est pas une quantité fixe et déterminée.

On se sert pour représenter la différentielle de la lettre d. Ainsi $df(x)$ signifie la différentielle de $f(x)$.

Quand l'accroissement de la variable tend indéfiniment vers zéro, la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à sa différentielle est l'unité.

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x) + \varepsilon h$$

$$df(x) = h f'(x).$$

Divisons membre à membre

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{df(x)} = 1 + \frac{\varepsilon}{f'(x)}.$$

Quand h devient infiniment petit, ε tend vers zéro, $f'(x)$ a une valeur constante.

Donc $\lim. \dfrac{f(x+h) - f(x)}{d f(x)} = 1.$

Soit le cas particulier $f(x) = x$. alors $f'(x) = 1$, et par suite $df(x) = h$. Ainsi $h = dx$. On a donc :
$f(x+h) - f(x) = dx\left\{f'(x) + \varepsilon\right\} = f'(x)dx + \varepsilon dx.$

Ainsi la différentielle de la variable indépendante

est l'accroissement arbitraire de cette variable.

Soit $y=f(u)$ et $u=\varphi(x)$, auquel cas y est une certaine fonction F de x, que nous supposerons variable indépendante; je dis qu'on aura $df(u)=f'(u)\,du$.

Si u était variable indépendante, il n'y aurait pas lieu à un théorème; la relation précédente aurait lieu par définition: car du serait l'accroissement entier de u.

Mais si u est fonction de la variable indépendante, alors du n'est qu'une partie de l'accroissement de u. Néanmoins la différentielle de $f(u)$ garde la même forme que si u était variable indépendante, et je dis qu'on a $df(u)=f'(u)du$.

En effet $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$. Par conséquent $y=f[\varphi(x)]=F(x)$. Donc $f(u)=F(x)$.
Changeons x en $x+h$: u se change alors en $u+K$: et on a $K=\varphi(x+h)-\varphi(x)$.
Puisque $f(u)=F(x)$.
On a $f(u+K)=F(x+h)$.

Donc $$\frac{f(u+K)-f(u)}{h}=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$
et on peut écrire cette relation:
$$\frac{f(u+K)-f(u)}{K}\cdot\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$
Faisons tendre h vers zéro, alors K décroît aussi vers zéro. Donc dans le premier membre, l'un des facteurs tend vers la limite $f'(u)$ et l'autre vers la limite $\varphi'(x)$.

La limite du second membre est d'ailleurs $F'(x)$.
Donc (1) $\quad f'(u).\varphi'(x)=F'(x)$.
Ce qui démontre en passant ce théorème, savoir:

La dérivée d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivées des fonctions intermédiaires, rapportées chacune à sa variable immédiate.

Maintenant multiplions les deux membres de l'égalité (1) par dx; nous aurons :

$$f'(u).\varphi'(x)dx = F'(x)dx.$$

Mais $\varphi'(x)dx$, c'est du et $F'(x)dx$ c'est dy ou $df(u)$.
Donc enfin $df(u) = f'(u)du$. ce qu'il fallait démontrer.

Si le nombre des fonctions intermédiaires était plus considérable, la différentielle garde toujours la même forme.
Ainsi soient :

$$y = f(u) \quad u = \varphi(v) \quad v = \psi(x).$$

Supposons que x soit la variable indépendante. Puisque u dépend de v et que v lui-même dépend de x, il est clair que u est une certaine fonction de x qui est la variable indépendante. Donc d'après le théorème précédent : on a : dy ou $df(u) = f'(u)du$.

De même s'il y avait un plus grand nombre de fonctions intermédiaires.

On peut aussi démontrer généralement le théorème de la dérivée d'une fonction de fonction. On a en effet d'après les théorèmes démontrés

$$dy = f'(u)du \qquad du = \varphi'(v)dv$$

et par définition $\qquad dv = \psi'(x)dx.$

En multipliant membre à membre on a

$dy = f'(u).\varphi'(v).\psi'(x).dx$. C'est la différentielle d'y; donc en divisant par l'accroissement dx de la variable indépendante, on aura la dérivée de $y = F(x)$. On a donc :

$$F'(x) = f'(u).\varphi'(v).\psi'(x).$$

Et ainsi pour un plus grand nombre de fonctions.

Donc la dérivée d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivées des fonctions intermédiaires, rapportées chacune à la variable immédiate.

De ce qui précède, il résulte que, *quelle que soit la variable indépendante*, si $y = f(x)$ on a toujours $dy = f(x) dx$.

Par suite : $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ (2). Ainsi la dérivée de la fonction est égale au quotient des différentielles de la fonction et de sa variable.

On déduit de là une notation commode pour représenter la dérivée de y prise par rapport à x savoir : $\frac{dy}{dx}$, et en vertu de l'égalité (2), on pourra tantôt considérer $\frac{dy}{dx}$ comme la dérivée de $f(x)$, tantôt comme le quotient de dy par dx, puisque ces deux quantités sont égales. Ainsi on écrira sans que ce soit une identité :

$$dy = \frac{dy}{dx} . dx.$$

Supposons que x soit la variable indépendante et soit $y = f(x)$: on a $dy = f'(x) dx$.

Quand la différentielle dy est constamment nulle pour certaines valeurs de x, la dérivée est aussi constamment nulle et réciproquement. Mais cela suppose que x est variable indépendante ; car dx doit être indéterminé et non nul, ce qui pourrait arriver si x dépendait d'une autre variable. On a donc ces théorèmes.

1°. *Quand la différentielle d'une fonction est constamment nulle pour les valeurs d'x comprises entre a et b, la fonction est constante pour ces mêmes valeurs.*

2°. *Si deux fonctions pour toutes les valeurs d'x comprises entre a et b ne diffèrent que par une constante*

leurs différentielles sont égales entre elles.

3° Réciproquement.

Soit $y = f(x)$, x étant la variable indépendante. Prenons des axes rectangulaires, et supposons construite la courbe dont l'équation est $y = f(x)$.

Soit $OP = x$ et $MI = h = dx$

Soit MR la tangente en M, on a $tg.\, RMI = f(x)$, et le triangle rectangle RMI donne :

$RI = MI \times tg.\, RMI = f'(x)dx = dy.$

Ainsi la différentielle de la fonction y est représentée par l'accroissement de l'ordonnée compté jusqu'à la tangente.

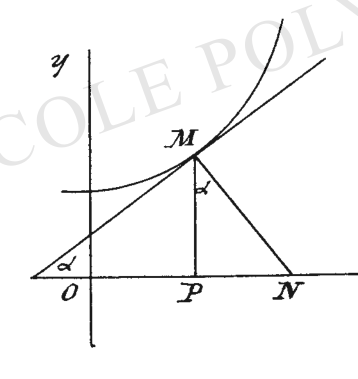
Par suite $M'R$ est la seconde partie de l'accroissement c'est-à-dire $\varepsilon\, dx$.

Si x n'est pas la variable indépendante, alors MI n'est plus égale à dx, et par suite RI n'est plus dy. Mais d'après le théorème démontré, $f'(x)$ est toujours $\frac{dy}{dx}$. Donc dans ce cas, on a une représentation géométrique du rapport des deux différentielles. Ce rapport est ici celui de RI à MI, qui reste constant quel que soit l'accroissement donné à x.

Nous pourrons déjà, au moyen des principes du calcul différentiel, mettre en équation des problèmes que l'algèbre ordinaire ne peut résoudre.

On sait que dans la parabole, la sous-normale est de longueur constante. Proposons de trouver toutes les courbes pour lesquelles la sous-normale est constante.

La sous-normale $PN = MP \times tg.\, NMP = y\, tg.\, \alpha$.



Représentons la sous-normale par S_n : on aura $S_n = y.\,tg.\,\alpha$.

Or $tg.\,\alpha = \frac{dy}{dx}$: donc $S_n = y\,\frac{dy}{dx}$.

C'est là l'expression analytique de la normale dans une courbe quelconque. Soit A une constante, on demande toutes les courbes pour lesquelles on a $A = y.\,\frac{dy}{dx}$

d'où $y\,dy = A\,dx$

d'où $2y\,dy = 2A\,dx$.

Le premier membre est la différentielle de y^2, et le second celle de $2Ax$, quelle que soit la variable indépendante. Puisque ces deux différentielles sont égales, les deux fonctions y^2 et $2Ax$ ne diffèrent que par une constante, l'équation générale des courbes cherchées est donc :

$$y^2 = 2Ax + C$$

C étant une constante.

Ainsi les paraboles sont les seules courbes pour lesquelles la sous normale est constante.

Problèmes analogues. — Trouver toutes les courbes telles que la sous-tangente est constamment proportionnelle au cube de l'ordonnée.

Id. telles que la sous-normale soit égale à $A\,\frac{x^m}{y^n}$.

Id. telle que la sous-tangente soit égale à $B\,\frac{y^p}{x^q}$.

m, n, p, q étant entiers et positifs.

Nous désignerons désormais dans nos calculs la variable indépendante par x ; et par y, u, v, w ...... des fonctions de cette variable. Quant aux premières

lettres de l'alphabet A, B, C etc, elles sont réservées pour représenter les quantités constantes.

Pour désigner l'accroissement de la variable et les accroissements correspondants des fonctions on se sert de la Δ. Ainsi Δx étant l'accroissement de la variable, Δy, Δu, Δv etc, tous les accroissements correspondants des fonctions y, u, v etc.

Il résulte de là, et des théorèmes déjà demontrés, que

$$\frac{dy}{dx} = \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{du}{dx} = \lim. \frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ etc.}$$

Examinons d'abord les quantités que l'on considère en général dans l'algèbre, c'est-à-dire, qui sont liées entre elles par voie d'addition algébrique de multiplication de division et d'élévation aux puissances.

Soit $y = u + v - w$. On demande de différentier la somme y, sachant prendre la différentielle de chaque fonction u, v, w en particulier.

Si change x en $x + \Delta x$; y se change en $y + \Delta y$, u en $u + \Delta u$ etc.

On a donc:

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (w + \Delta w).$$

En retranchant membre à membre

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w.$$ En divisant par Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Faisons tendre Δx vers zéro, et passons à la limite nous aurons:

$$\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ ou bien } \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$$

Et en multipliant par dx:

$$dy = du + dv - dw.$$

Delà, on déduit la règle suivante :

<u>La différentielle de la somme algébrique de plusieurs fonctions est égale à la somme algébrique des différentielles de ces fonctions.</u>

La multiplication présente plusieurs cas.

1er Cas. Différentier le produit d'une fonction par une constante :

$y = Au$ Je change x en $x + \Delta x$

$y + \Delta y = A\,(u + \Delta u)$. d'où :

$\Delta y = A.\,\Delta u$. divisons par Δx

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A\,\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$. Et en passant à la limite

$$\frac{dy}{dx} = A\,\frac{du}{dx}$$

Donc dy c'est-à-dire $d(Au) = A\,du$.

Règle : <u>La différentielle du produit d'une constante par une fonction, est égale à la constante multipliée par la différentielle de la fonction.</u>

2ème cas. Différentier le produit de deux fonctions.

Soit $y = uv$. Je change x en $x + \Delta x$;

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v$$

Il en résulte que :

$$\Delta y = v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v.$$

et que : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = v\,\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + (u + \Delta u)\,\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

Quand Δx décroît et tend vers zéro, il y a toujours égalité entre ces deux quantités : par suite, à la limite.

$\dfrac{dy}{dx} = v\,\dfrac{du}{dx} + u\,\dfrac{dv}{dx}$. Donc :

dy ou $d(uv) = v\,du + u\,dv$.

Règle : La différentielle du produit de deux facteurs variables est égale à la somme des produits qu'on obtient en multipliant la différentielle de chaque facteur par l'autre facteur.

Ce cas comprend le précédent. Car si $v = A$ alors $dv = 0$, et on a par la formule du second cas $d(Au) = A\,du$.

Il est bon néanmoins d'avoir une règle pour le 1er. cas.

3ème. cas. Différentier le produit d'un nombre quelconque de facteurs.

S'il s'agit d'abord de trois facteurs, $y = uvw$, on peut considérer y comme le produit de deux facteurs, et on a d'après le cas précédent :

$$dy = d(uv) \times w = w\,d(uv) + uv\,dw =$$
$$w\,(v\,du + u\,dv) + uv\,dw.$$

Donc enfin on a :

$$d(uvw) = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw.$$

Ainsi la règle de différentiation est celle-ci

La différentielle du produit de trois facteurs est égale à la somme des produits qu'on obtient en multipliant la différentielle de chaque facteur par le produit des deux autres facteurs.

Par le même moyen que précédemment, il est facile d'établir que si la règle est vraie pour le produit de m facteurs, elle est encore vraie pour le produit de $m+1$ facteurs.

Soient en effet u, v, w etc m facteurs et soit S le $(m+1)^{me}$, on peut considérer le produit :

$$y = u\,v\,w \ldots\ldots S$$

comme le produit de deux facteurs, savoir :

$$y = (u\,v\,w \ldots) \times s.$$

Par conséquent, d'après la règle du 2ème. cas

$$dy = s.\,d\,(u\,v\,w \ldots) + (u\,v\,w \ldots)\,ds.$$

La seconde partie du second membre c'est la différentielle du facteur s, multipliée par le produit de tous les autres facteurs qui sont en nombre m. Quant à la première partie, il résulte de l'hypothèse qu'elle se compose de la somme des produits que l'on obtient en multipliant la différentielle de chacune de ces m autres facteurs par le produit de tous les autres.

Donc, règle générale :

La différentielle du produit d'un nombre quelconque de facteurs est égale à la somme des produits qu'on obtient en multipliant la différentielle de chaque facteur, par le produit de tous les autres.

Remarque. Soit $y = u\,v\,w \ldots s$.

Divisons par y la différentielle dy, et nous aurons :

$$\frac{dy}{y} = \frac{d\,(u\,v\,w \ldots s)}{u\,v\,w \ldots s} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots + \frac{ds}{s}$$

puisque dans chaque terme de dy une seule fonction entre par différentielle, et que toutes les autres fonctions y entrent comme facteurs. Le quotient de la différentielle par la fonction jouit d'une propriété analogue à celle des logarithmes. On verra plus tard à quoi cela tient.

Nous ne considérerons pas le cas où le dénominateur est constant ; car ce cas rentre évidemment dans le premier de la multiplication.

1er. cas. Le numérateur est constant et le dénominateur variable. Soit $y = \frac{A}{u}$ d'où $uy = A$ et par conséquent

$d(uy)=0$ ou bien $udy+ydu=0$.
Delà on tire la valeur de dy, savoir :

$$dy=-y.\frac{du}{u} \quad \text{mais} \quad y=\frac{A}{u}. \text{ donc}$$

$$dy=\frac{-A\,du}{u^2}. \text{ Ainsi :}$$

La différentielle d'une fonction dont le dénominateur est variable et le numérateur constant est égale à ce numérateur, pris en signe contraire, multiplié par la différentielle du dénominateur, et divisé par le carré de ce dénominateur.

2me. Cas. Les deux termes de la fraction sont variables. Soit $y=\frac{u}{v}$ d'où $vy=u$. On a en différentiant les deux valeurs :

$$vdy+ydv=du. \text{ D'où l'on tire :}$$

$$dy=-y\frac{dv}{v}+\frac{du}{v}. \text{ Mais } y=\frac{u}{v}.$$

Donc $dy=\frac{du}{v}-\frac{udv}{v^2}=\frac{vdu-udv}{v^2}$

La différentielle d'une fraction dont les deux termes sont variables est égale au dénominateur multiplié par la différentielle du numérateur, moins le numérateur, multiplié par la différentielle du dénominateur, le tout divisé par le carré du dénominateur.

Ce second cas comprend le premier ; car il suffit d'y supposer $u=A$; mais il est bon d'avoir une règle pour chacun de ces cas.

Soit à différentier la fonction $y=u^m$.

1er. Cas. Supposons m un nombre entier et positif.
On a démontré que :

$$\frac{d(uvw\ldots)}{uvw} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \text{etc.}$$

Supposons que les facteurs $u, v, w, \ldots$ soient en nombre m et qu'ils soient tous égaux entre eux. Cette formule montre que :

$$\frac{d(u^m)}{u^m} = m\frac{du}{u}. \text{ Donc } d(u^m) = mu^{m-1}du.$$

Formule qui était connue pour ce cas

Nous allons faire voir qu'elle est générale.

2ème Cas. Supposons que m soit positif et fractionnaire, et soit $m = \frac{p}{q}$, p et q étant des nombres entiers et positifs.

Si $y = u^m = u^{\frac{p}{q}}$, on a :

$$y^q = u^p. \text{ Par suite :}$$

$$d(y^q) = d(u^p);$$

c'est-à-dire, puisque p et q sont entiers et positifs.

$$qy^{q-1}dy = pu^{p-1}du$$

$$\text{D'où } dy = \frac{p}{q} \cdot \frac{u^{p-1}}{y^{q-1}} \cdot du$$

$$\text{Mais } y = u^{\frac{p}{q}}. \text{ Donc } y^{q-1} = \left(u^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}$$

$$= u^{p-\frac{p}{q}}. \text{ Donc } \frac{u^{p-1}}{y^{q-1}} = u^{\frac{p}{q}-1}$$

mais $\frac{p}{q} = m$. Donc :

$$dy \text{ ou } d(u^m) = mu^{m-1}du.$$

3ème Cas. Supposons $m = -n$, n étant positif entier ou fractionnaire, alors ;

$$d(u^m) = d(u^{-n}) = d\left(\frac{1}{u^n}\right) = \frac{-d(u^n)}{u^{2n}}$$

$$= \frac{-nu^{n-1}du}{u^{2n}} = -n\,u^{-n-1}du.$$

Mais $m = -n$. Donc enfin :

$$d\,(u^m) = m u^{m-1} du.$$

Ainsi, règle générale,

La différentielle d'une puissance quelconque d'une fonction est égale à l'indice de la puissance, multiplié par la fonction élevée à un degré moindre d'une unité, et par la différentielle de cette fonction.

Les extractions des racines n'étant autre chose que des élévations à des puissances fractionnaires, il n'y a rien à ajouter pour la différentiation des radicaux. Néanmoins comme les radicaux carrés se présentent fréquemment dans les calculs, il est bon d'avoir une règle particulière pour ces radicaux.

Soit donc $y = \sqrt{u}$: On a

$$dy = d\sqrt{u} = d\left(u^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{du}{2\sqrt{u}}.$$

Ainsi, la différentielle d'un radical carré est égale à la différentielle de la quantité soumise au radical divisée par le double du radical. Règle qu'on peut d'ailleurs démontrer directement.

Pour avoir les règles à suivre pour obtenir les dérivées des diverses fonctions algébriques, on n'a qu'à changer le mot de différentielle en celui de dérivée dans tout ce qui précède. Il est clair qu'on aura ainsi des théorèmes exacts : car la différentielle ne diffère de la dérivée que par le facteur dx ; et ce facteur se trouve et doit se trouver dans tous les termes de la différentielle, car cette différentielle est de la forme :

$f'(x)\,dx$.

Soit à différentier $y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$: on a :

$$dy = \frac{\sqrt{1+x^2}\,dx - x\,d\sqrt{1+x^2}}{1+x} = \frac{\sqrt{1+x^2}\,dx - x\frac{2x\,dx}{2\sqrt{1+x}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)\,dx - x^2\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Séries.

On appelle *série indéfinie* ou simplement *série* une *suite de termes en nombre infini qui se succèdent d'après une loi déterminée*.

Soit une série :

$$u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots\ldots u_n.$$

Si l'on fait la somme des n premiers termes, savoir :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

et si l'on fait croître n indéfiniment, il peut arriver que S_n tende vers une limite finie et déterminée, S, savoir $\lim. S_n = S$.

Dans ce cas, on dit que la série est *convergente*, et qu'elle a pour *somme* S. Le mot *somme* est ici un peu détourné de sa signification ordinaire, et il ne faut pas confondre la *somme d'une série* avec la somme algébrique d'un certain de ses termes.

Dans le cas où S_n ne tend vers aucune limite quand n croît indéfiniment, on dit que la série est divergente.

Il existe des séries convergentes. On peut en donner l'exemple suivant.

Soit une droite AB qu'on peut supposer égale à l'unité de longueur. Soient :

A ———— C ———— D E F B

$AB = 1 \quad AC = \frac{1}{2} \quad CD = \frac{1}{4}$

$DE = \frac{1}{8} \quad EF = \frac{1}{16}$ etc.

Considérons la série $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ etc.

Si l'on prend les deux premiers termes, et qu'on fasse leur somme, la figure montre que cette somme est moindre que l'unité et que la différence est égale à $\frac{1}{4}$. On voit de même que si on fait la somme des trois premiers, on aura une différence analogue égale à $\frac{1}{8}$; pour les quatre premiers une différence égale à $\frac{1}{16}$, et ainsi de suite. La différence diminue donc constamment, et peut devenir aussi petite qu'on voudra; en d'autres termes, les points C, D, E, F, etc. s'approchant de plus en plus du point B, s'en approchent indéfiniment et ne le dépassent jamais. Donc la série considérée est convergente, et elle a pour somme l'unité.

On appelle reste d'une série la différence qui existe entre la somme de la série et la somme des premiers termes. Il est clair que le reste de la série n'est pas une quantité déterminée, mais une quantité qui varie avec n.

Il arrive dans beaucoup de cas qu'on ne peut pas calculer exactement la somme S de la série. Mais soit r_n le reste de la série, on a

$$r_n = S - S_n \quad \text{d'où} \quad S = S_n + r_n.$$

Par hypothèse r_n a pour limite zéro quand n croît indéfiniment. Si donc n est suffisamment grand, on peut avec S_n avoir une valeur de S assez approchée pour les calculs que l'on doit faire. Si en outre on connaît deux limites de r_n, c'est-à-dire si on sait que r_n ne peut dépasser une certaine quantité, ni être inférieure à une autre quantité, on aura une limite de l'erreur que l'on commet en subs-

-tituant à la valeur exacte de S, une de ses valeurs approchées S_n.

La série qui vient de servir d'exemple est une progression géométrique. Soit en général une progression géométrique :

$$A : Ax :: Ax^2 : Ax^3 : \text{etc} \ldots\ldots : Ax^{n-1}.$$

A étant une quantité quelconque et x étant une quantité positive ou négative, mais dont la valeur numérique est plus petite que l'unité.

La somme des n premiers termes :

$$S_n = A(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}) = A\frac{1-x^n}{1-x}$$

On peut écrire cette somme :

$S_n = \frac{A}{1-x} - \frac{Ax^n}{1-x}$. Quand n croît indéfiniment x^n tend vers zéro ; par conséquent la somme de la série est :

$$\lim. S_n = S\frac{A}{1-x}$$

et le reste de la série $r_n = \frac{Ax^n}{1-x}$.

Une condition nécessaire pour que la série soit convergente, c'est que le terme général devienne infiniment petit, c'est-à-dire tende vers zéro, quand l'indice qui indique son rang croît indéfiniment. Cette condition est nécessaire ; car si elle n'était pas remplie, on ajouterait constamment et indéfiniment des quantités finies à la somme des termes précédents, à mesure qu'on prendrait un plus grand nombre de termes, et par conséquent la somme de ces termes ne saurait avoir de limite. Mais cette même condition n'est pas suffisante.

Considérons en effet la série :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\text{etc.}$$

Je groupe les termes de cette série de la manière suivante :

dans le premier groupe .... $1+\frac{1}{2}$

dans le second les deux termes .... $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

dans le troisième les quatre termes qui suivent : $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$

dans le quatrième les huit, dans le cinquième les seize &c... termes suivants, de telle manière dans le dernier terme de chaque groupe est une puissance entière de $\left(\frac{1}{2}\right)$.

Maintenant il est clair que dans le second groupe on a une somme plus grande que $2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

dans le troisième une somme plus grande que $4.\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

dans le quatrième .... $8.\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$

Et ainsi de suite. Et généralement.

Dans le n^{me}. groupe une somme supérieure à $2^n\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$.

Comme d'ailleurs il y a un nombre indéfini de groupes, la somme des termes de cette série se compose d'un nombre indéfini de parties toutes plus grandes que $\frac{1}{2}$. Il n'y a donc pas de limite vers laquelle cette limite puisse tendre. Et par conséquent la série n'est pas convergente.

Le caractère général de la convergence d'une série est, ainsi qu'on l'a dit, que la somme S_n tend vers une limite déterminée quand n devient infiniment grand. Mais il est clair que les premiers termes de la série n'influe en rien sur la convergence ; elle ne dépend évidemment que de la loi des derniers termes.

Soient $S_n, S_{n+1}, S_{n+2} \ldots\ldots S_{n+m}$ les sommes des $n, n+1, n+2 \ldots\ldots n+m$ premiers termes de la série : on a :

$S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ d'où $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$

et de même ....

$$\begin{cases} S_{n+2} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} \\ S_{n+3} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_{n+m} - S_n = u_{n+1} + \dots + u_{n+m} \end{cases}$$

Si la série est convergente tous les seconds membres s'annullent quand n croît indéfiniment : car toutes les sommes S_n, S_{n+1} ... S_{n+m} ont une limite commune qui est S, et celà a lieu quelque soit m.

Réciproquement, si celà a lieu quelque soit m, la convergence de la série est assurée. Celà est évident.

Nous nous occuperons d'abord des séries dont les termes sont tous de même signe, et pour fixer les idées, nous les supposerons tous positifs.

1. Soit la série $u_1, u_2, u_3, \dots u_n$.
Faisons la somme des n premiers termes :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots + u_n.$$

Supposons qu'on ait reconnu que cette somme quel que soit n, est toujours plus petite qu'une quantité fixe b : je dis que la série est convergente. En effet, tous les termes étant positifs, il y a toujours augmentation dans la somme S_n à mesure que n augmente. Comme d'ailleurs, cette somme ne dépasse pas b, il s'ensuit qu'elle tend vers une limite égale à b ou moindre que b.

Ainsi quand la somme S_n est toujours, quelque soit n, inférieure à une quantité fixe b, la série est convergente, et la somme de la série est égale à b ou moindre que b.

2. Soit u_n le terme général. Formons $\sqrt[n]{u_n}$, et supposons qu'à partir d'une certaine valeur de n, et pour toutes les valeurs suivantes $\sqrt[n]{u_n}$ soit plus petit que K, K étant < 1; je dis que la série est convergente.

(La première inégalité $\sqrt[n]{u_n} < K$ n'exclue pas d'ailleurs l'égalité). Puisque $\sqrt[n]{u_n} < K$,

on a : $$u_n < K^n$$
et de même
$$u_{n+1} < K^{n+1}$$
$$u_{n+2} < K^{n+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{n+m} < K^{n+m}$$

Par suite :
$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m} < K^n + K^{n+1} + K^{n+2} + \cdots + K^{n+m}$$
ou bien $$< K^n(1 + K + K^2 + \cdots + K^m)$$
ou bien $$< K^n \frac{1 - K^{m+1}}{1 - K}$$, et à fortiori
$$< K^n \cdot \frac{1}{1 - K}.$$

Car il est clair que K est positif. Or quand n croît indéfiniment $\frac{K^n}{1-K}$ tend vers zéro. Par conséquent, quelque soit m, la somme : $u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+m}$ tend vers zéro quand n est infiniment grand, et par conséquent la série est convergente.

Quant au reste de cette série : $r_n = S - S_n$ c'est la somme d'une autre série, qui est elle-même convergente, savoir $r_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_n + m$, ce reste quelque grand que soit m est toujours, ainsi qu'on vient de le voir, moindre que $\frac{K^n}{1-K}$. On sait d'ailleurs qu'il est positif.

On a donc deux limites entre lesquelles le reste est toujours compris, c'est-à-dire tout ce qui est nécessaire dans la plupart des applications.

Ici on voit qu'on n'a fait que comparer la série proposée à une série géométrique. On peut présenter le théorème plus généralement en la comparant à une autre série quelconque mais qui est connue.

Soit $u_1 \; u_2 \; u_3 \ldots u_n$ la série proposée et $v_1 \; v_2 \; v_3 \ldots v_n$ une série connue, et qu'on sait être convergente.

Supposons qu'à partir d'une certaine valeur de n et pour toutes les valeurs suivantes, on ait $u_n < v_n$. (cette première inégalité n'excluant pas d'ailleurs l'égalité). Je dis que la première série est convergente, et qu'elle a constamment pour reste une quantité moindre que le reste de la seconde.

En effet on a :

$$u_{n+1} < v_{n+1}$$
$$u_{n+2} < v_{n+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{n+m} < v_{n+m}$$

Si l'on appelle r_n et R_n les restes des deux séries on aura $r_n < R_n$. Pour n infini, R_n tend vers zéro. Donc il en est de même de r_n. Ce qu'il fallait démontrer.

Supposons qu'on ait reconnu que $u_n < A v_n$ et même que cette relation n'existe qu'à partir de u_{n+1}, on en conclura de même que la série est convergente. En effet, on aura :

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m} < A(v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots + v_{n+m}).$$

On voit donc encore comme précédemment que la série est convergente. Quant au reste, on peut affirmer que celui de la première série est plus petit que A, multiplié par le reste de la seconde série.

On peut donc avec une série convergente en former une infinité d'autres.

Soit en effet une série convergente :

$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \ldots\ldots\ldots v_n$

et soient :

$A_1 \; A_2 \; A_3 \ldots\ldots\ldots A_n$ des nombres quelconques assujettis à la seule condition d'être plus petits qu'un nombre A, mais qui d'ailleurs peuvent être positifs, négatifs, et même nuls. Je dis que la série :

$A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3 + \ldots\ldots + A_n v_n$

est convergente.

En effet la somme des n premiers termes de cette dernière série est par hypothèse moindre que

$A(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots + v_n)$.

Par hypothèse aussi, le facteur A est constant, l'autre facteur a une limite finie quand n croît indéfiniment. Donc la somme des n premiers termes de la nouvelle série tend vers une limite déterminée. Par conséquent cette série est convergente.

Par exemple, si K est <1, la série

$1, K, K^2 \ldots K^{n-1}$ est convergente

Soient $A_1 \; A_2 \; A_3 \ldots\ldots A_n$ des nombres tous plus petits qu'un nombre fixe A, mais d'ailleurs >0, <0, ou même $=0$.

La série :

$A_1 + A_2 K + A_3 K^2 + \ldots + A_n K^{n-1}$

est convergente. Car dans cette série on a

$$S_n < A\left(1+K+K^2+\dots+K^{n-1}\right)$$

ou bien $< A\left(\dfrac{1-K^n}{1-K}\right)$

et à fortiori $< \dfrac{A}{1-K}$. Donc la série est convergente.

Quant au reste, on sait qu'il est moindre que $\dfrac{A K^n}{1-K}$.

3°. Soit une série $u_1\ u_2\ u_3 \dots u_n$.

Supposons qu'en faisant le quotient d'un terme par le précédent, on trouve un quotient constamment plus petit que K, K étant une quantité fixe, < 1. Je dis que la série est convergente.

En effet de l'hypothèse, il résulte:

$$\left.\begin{array}{l} u_{n+2} < K u_{n+1} \\ u_{n+3} < K u_{n+2} \\ \dots\dots\dots \\ u_{n+m} < K u_{n+m-1} \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} u_{n+2} < K u_{n+1} \\ u_{n+3} < K^2 u_{n+1} \\ \dots\dots\dots \\ u_{n+m} < K^{m-1} u_{n+1}. \end{array}\right.$$

Donc en ajoutant ces inégalités, et ajoutant u_{n+1} aux deux membres de l'égalité résultante:

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+m} < \left(1+K+K^2+\dots+K^{n+1}\right)u_{n+1}$$

ou bien: $$< \frac{1+K^m}{1+K}\cdot u_{n+1}$$

et à fortiori: $$< \frac{u_{n+1}}{1-K}.$$

Il est évident qu'on suppose que u_{n+1} tend vers zéro quand n croît indéfiniment, sans cela, ainsi que nous l'avons dit, il n'y a pas de convergence possible. On voit donc maintenant que quel que soit m la somme:

$u_{n+1} + \cdots\cdots + u_{n+m}$
décroît indéfiniment et tend vers zéro quand n est infiniment grand. Par conséquent la convergence existe, et le reste n'est jamais supérieur à $\dfrac{u_{n+1}}{1-K}$.

On peut remarquer que la démonstration précédente est encore une comparaison avec une série géométrique.

Soit la série :

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{x^n}{1.2..n} + \frac{x^{n+1}}{1.2...n(n+1)} + \cdots$$

et pour garder notre notation, designons-en les termes respectivement par :

$u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \ldots\ldots u_{n+1} , \quad u_{n+2}$.
On voit dans ce cas que :

$$u_{n+2} = u_{n+1}\frac{x}{n+1} \qquad u_{n+3} = u_{n+2}\frac{x}{n+2} \cdots\cdots$$

Faisons $K = \dfrac{x}{n+1}$: (Il est clair que n peut être choisi assez grand pour que $\dfrac{x}{n+1}$ soit < 1). Alors on a :
$u_{n+2} = K u_{n+1}$
$u_{n+3} < K u_{n+2}$ et par suite $< K^2 u_{n+1}$.
Et ainsi de suite. On voit par là que pour démontrer la convergence de la série, il suffit de faire voir que u_{n+1} devient infiniment petit quand n augmente indéfiniment.

$$\text{Or } u_{n+1} = \frac{x^n}{1.2.3....n} = \frac{x^p}{1.2.3..p}\cdot\frac{x}{p+1}\cdot\frac{x}{p+2}\cdots\frac{x}{n},$$

Comme il y a au numérateur autant de facteurs égaux à x que de facteurs numériques au dénominateur ; on voit que u_{n+1} peut être mis sous cette dernière forme. Ici p est un nombre arbitraire mais $< n$.

$$\text{Alors : } u_{n+1} < \frac{x^p}{1.2.3..p}\left(\frac{x}{p+1}\right)^{n-p}$$

Le nombre p étant arbitraire, on peut le choisir assez grand pour que $\frac{x}{p+x}$ soit < 1. D'ailleurs, le premier facteur :

$$\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}$$

a une valeur constante, et en faisant croître n indéfiniment, le facteur $\left(\frac{x}{p+1}\right)^{n-p}$ décroît jusqu'à zéro. Il en est donc de même de u_{n+1}, et par suite la série est convergente.

Soit la série :

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{5^\mu} + \text{ etc} \ldots\ldots$$

On vient de voir que quand $\mu = 1$ cette série n'est pas convergente.

Supposons $\mu > 1$. Groupons les termes de la série de la manière suivante, savoir :

dans le premier groupe le premier terme ..... (2^0)
dans le second les deux suivants .... (2^1)
dans le troisième les quatre .... (2^2)
dans le quatrième les huit .... (2^3)
....
dans le $m^{\text{ème}}$ les 2^{m-1} termes suivants. (2^{m-1}).

Maintenant je fais la somme S_n des n premiers termes de la série. Si le $n^{\text{ème}}$ terme n'est pas une puissance entière de $\frac{1}{2}$, je prends parmi les termes suivants la puissance de $\frac{1}{2}$ qui en est le plus rapprochée.

Soit $\frac{1}{2^{(p-1)\mu}}$ cette puissance. Elle est le premier terme d'un groupe qui est le $p^{\text{ème}}$ et qui finit par le terme $\frac{1}{(2^p-1)^\mu}$ et qui contient par conséquent, d'après la loi qu'il

a été facile d'apercevoir, 2^{p-1} termes.

Maintenant, il est clair que dans chaque groupe on a des sommes qui sont respectivement moindres, savoir :

dans le second, que . . . . $2.\frac{1}{2^{\mu}} = \frac{1}{2^{\mu+1}}$

dans le troisième, que . . . . . . $4.\frac{1}{4^{\mu}} = \frac{1}{2^{2(\mu-1)}}$

dans le quatrième, que . . . . $8.\frac{1}{8^{\mu}} = \frac{1}{2^{3(\mu-1)}}$

. . . .

dans le $p^{ème}$, que . . . . $2^{p-1}\frac{1}{2^{(p-1)\mu}} = \frac{1}{2^{(p-1)(\mu-1)}}$.

Par conséquent, pour une double raison, la somme S_n est moindre que :

$$1 + \frac{1}{2^{\mu-1}} + \frac{1}{2^{2(\mu-1)}} + \frac{1}{2^{3(\mu-1)}} + \dots + \frac{1}{2^{(p-1)(\mu-1)}}$$

et à fortiori : $< \frac{1}{1-\frac{1}{2^{\mu-1}}}$,

ou bien $S_n < \frac{2^{\mu-1}}{2^{\mu-1}-1}$.

La somme S_n est par conséquent constamment moindre qu'une quantité fixe et finie. Donc la série est convergente.

Cette même formule fait voir que si $\mu = 1$, la série n'est pas convergente : car dans ce cas $\frac{2^{\mu-1}}{2^{\mu-1}-1} = \infty$.

Considérons maintenant les séries dont les termes sont les uns positifs, les autres négatifs,

Soit la série :

$$u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad u_n \qquad (u)$$

Désignons respectivement par :

$$U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad U_n \qquad (U)$$

les valeurs numériques ou absolues des différents termes : je dis que :

Si la série (U), formée par les valeurs numériques des termes de la série (u), est convergente ; la série (u) est elle même convergente, et de plus le reste, abstraction faite du signe, est le même pour les deux séries.

En effet, ce reste dépend de la considération de la quantité :

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots\ldots\ldots + u_{n+m}.$$

Or les différents termes de cette somme ont respectivement pour valeurs numériques :

$$U_{n+1}, \; U_{n+2}, \; U_{n+3}, \ldots\ldots\ldots\ldots U_{n+m}.$$

Par conséquent, abstraction faite du signe, on a :

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots + u_{n+m} < U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots\ldots + U_{n+m}$$

Il n'y aurait égalité entre ces deux quantités que dans le cas où tous les termes :

$$u_{n+1}, \; u_{n+2}, \ldots\ldots\ldots u_{n+m}$$

seraient de même signe. Or, par hypothèse, la série (U) est convergente ; par conséquent le second membre devient infiniment petit quand n croît indéfiniment. Il en est donc de même du premier membre.

Quant au reste de la série (u) borné à ses n premiers termes, il est égal à :

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots\ldots + u_{n+m}$$

m étant infiniment grand. Et ce qui précède fait voir, qu'en désignant par R_n le reste de la série (U), on a, en valeur absolue

$$r_n < R_n$$

Ce que l'on peut exprimer par la relation :

$$r_n = \pm \theta R_n$$

θ étant une quantité comprise entre 0 et 1.

On a vu que si la série :

$$u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots u_n$$

dont les termes sont tous positifs, est convergente, et si

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$$

désignent des quantités positives, toutes moindres qu'une quantité fixe a, la série :

$$a_1 u_1, a_2 u_2, a_3 u_3 \ldots\ldots\ldots a_n u_n$$

est aussi convergente.

Ce théorème est susceptible d'une généralisation importante. Soit :

$$u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n \qquad (u)$$

Une série dont la convergence a lieu indépendamment des signes de ses différents termes, de sorte qu'en désignant par :

$$U_1, U_2, U_3, \ldots\ldots\ldots U_n \qquad (U)$$

les valeurs numériques de ces mêmes termes, la série (U) est convergente :

Soient : $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$

des nombres positifs ou négatifs mais dont les valeurs absolues ne dépassent pas un certain maximum A. Désignons leurs valeurs absolues par :

$$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$$

Elles sont toutes plus petites que A. Par conséquent d'après le théorème qui a été rappelé, la série :

$$A_1 U_1, A_2 U_2, A_3 U_3 \ldots\ldots A_n U_n$$

est convergente, en d'autres termes, quand on fait croître n indéfiniment, la somme des n premiers termes de cette

série tend vers une limite finie et déterminée. Mais $A_n U_n$ c'est la valeur absolue de $a_n u_n$. Donc la somme des n premiers termes de la série :

$$a_1 u_1 , a_2 u_2 \ldots\ldots\ldots a_n u_n$$

n'est jamais supérieure à une quantité fixe et finie. Donc cette dernière série est convergente.

Quant au reste de cette série, bornée à ses n premiers termes, il est clair qu'en valeur absolue, il est moindre que celui de la série :

$$A_1 U_1 , A_2 U_2 \ldots\ldots A_n U_n ,$$

reste que l'on peut discuter d'après ce qui a été dit sur ces sortes de séries.

Il existe des séries dont la convergence tient aux signes de leurs différents termes, c'est-à-dire qui sont telles que les valeurs absolues de leurs termes ne forment pas une série convergente. La discussion de ces sortes de séries est souvent assez difficile.

Examinons en particulier le cas où tous les termes de la série sont alternativement positifs et négatifs, et où de plus la valeur numérique de chaque terme est plus petite que celle du précédent. On suppose, bien entendu, que cette valeur absolue devient plus petite que toute grandeur donnée, quand l'indice croît indéfiniment.

Soit donc : $u_1 , u_2 , u_3 \ldots\ldots\ldots u_n$

une série dans laquelle les termes sont alternativement positifs et négatifs, et où de plus les valeurs numériques des termes vont constamment en décroissant. Je dis que cette série est convergente, et que l'erreur commise en s'arrêtant à un certain terme est de même signe que ce terme, mais moindre que ce terme en valeur absolue.

En effet, la convergence de la série dépend de la considération de la quantité :

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots\cdots + u_{n+m}.$$

En désignant toujours les valeurs numériques de ces termes par :

$$U_{n+1},\ U_{n+2},\ U_{n+3}\ \cdots\cdots U_{n+m}$$

On a : $u_{n+1} = \pm U_{n+1}$ et par suite :

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m} = \pm\left(U_{n+1} - U_{n+2} + \cdots \pm U_{n+m-1} \mp U_{n+m}\right)$$

puisque par hypothèse, les termes de la série ont alternativement le signe + et le signe −. On prendra d'ailleurs, pour la parenthèse, le signe + ou le signe −, suivant que le terme u_{n+1} est positif ou négatif.

Quant aux doubles signes des derniers termes, on prendra le signe <u>supérieur</u> si m est <u>pair</u> et le signe <u>inférieur</u> si m est <u>impair</u>.

Maintenant je dis que la quantité entre parenthèses est positive. Car on peut l'écrire en groupant les termes deux à deux :

$$\left(U_{n+1} - U_{n+2}\right) + \left(U_{n+3} - U_{n+4}\right) + \cdots + \left(U_{n+m-1} - U_{n+m}\right)$$

si m est pair : ou bien

$$\left(U_{n+1} - U_{n+2}\right) + \left(U_{n+3} - U_{n+4}\right) + \cdots\cdots \qquad + U_{n+m}$$

si m est impair.

Dans l'un et l'autre cas, tous les groupes sont positifs ; car on suppose que les valeurs numériques des termes vont constamment en diminuant. Donc la quantité entre parenthèses est <u>positive</u>.

Je dis de plus qu'elle est plus petite que U_{n+1}, car on peut l'écrire, en formant des groupes de termes deux à deux :

$$U_{n+1} - \left(U_{n+2} - U_{n+3}\right) - \left(U_{n+4} - U_{n+5}\right) - \text{etc.} - U_{n+m}.$$

Si <u>m</u>, c'est-à-dire le nombre de termes est <u>pair</u> ou bien.

$$U_{n+1} - (U_{n+2} - U_{n+3}) - \text{etc.} - (U_{n+m-1} - U_{n+m})$$

si <u>m</u> est impair.

Dans les deux cas, on voit évidemment que la parenthèse contient une quantité moindre que U_{n+1}. On peut donc écrire :

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots + u_{n+m} = \pm \theta U_{n+1}$$

θ étant une quantité comprise entre 0 et 1. Si l'on fait croître n indéfiniment, U_{n+1} tend vers zéro, et décroît indéfiniment. C'est là une condition sans laquelle il n'y a pas de convergence possible. Donc la limite du premier membre est zéro ; et par suite la série est convergente.

Quant à l'erreur que l'on commet, elle est égale, quand on borne la série à ses n premiers termes, à :

$$r_n = u_{n+1} + \dots + u_{n+m} = \pm \theta U_{n+1}$$

m étant infiniment grand. Or, on sait que pour le second membre on prend le signe + si u_{n+1} est positif, et le signe − s'il est négatif.

Donc l'erreur est de même signe que le terme qui suit celui auquel on arrête la série. On a donc

$$r_n = \theta u_{n+1}.$$

C'est-à-dire que l'erreur n'est qu'une partie de ce même terme.

Le théorème est donc démontré.

Le mot somme ainsi que nous l'avons remarqué, est un peu détourné de sa signification ordinaire, dans la théorie des séries. Il faut se garder de confondre les deux acceptions de ce mot : on serait conduit à des absurdité. Ainsi dans l'exemple suivant on arriverait

à ce résultat qu'une même série a deux sommes, et même une infinité de sommes.

Soit la série :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \text{etc.}$$

dans laquelle les termes sont alternativement positifs et négatifs, dans laquelle aussi les valeurs numériques des termes vont constamment en décroissant, et qui par conséquent est convergente.

Si l'on confond les deux acceptions du mot Somme, il est clair qu'on sera conduit à dire, que, quel que soit l'ordre dans lequel on range ses termes, cette série a toujours la même somme. Or, il est facile de voir que c'est là un résultat inexact.

En effet, prenons dans la série deux termes positifs pour un négatif, et formons ainsi la série :

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \text{etc.}$$

Cette série, ainsi qu'on peut le démontrer est convergente. Cette convergence étant admise, je dis qu'elle n'a pas la même somme que la première série, en entendant par somme d'une série la limite vers laquelle tend la somme des n premiers termes, quand n grandit indéfiniment.

En effet, je prends dans les deux séries tous les termes qui se trouvent avant le terme $\frac{1}{2n}$. J'ai ainsi :

$$f(n) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

et, d'après une loi facile à apercevoir :

$$\varphi(n) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \text{etc} \cdots\cdots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}$$

La loi est celle-ci : $\frac{3+1}{2}=2 \quad \frac{7+1}{2}=4 \quad \frac{11+1}{2}=6$ etc.

Le dénominateur de chaque terme négatif est égal au dénominateur précédent, augmenté d'une unité, et divisé par 2. Cette loi indique bien que le dénominateur qui précède $2n$ est $4n-1$.

Si on retranche membre à membre :

$$\varphi(n)-f(n)=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}.$$

Car tous les termes qui précèdent $\frac{1}{2n}$ sont détruits par la soustraction.

Le second membre contient n termes. C'est ce qu'on peut reconnaître en remarquant qu'il y a autant de termes que de nombres impairs depuis $2n+1$ jusqu'à $4n-1$, inclusivement ; nombre qui est égal à $\frac{(4n+1)-(2n-1)}{2}=n$.

La différence $\varphi(n)-f(n)$ est moindre que n fois son premier terme, et plus grande que n fois son dernier.

$$\varphi(n)-f(n)<\frac{n}{2n+1}\ ,\ \varphi(n)-f(n)>\frac{n}{4n-1}$$

et à fortiori :

$$<\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad >\frac{1}{4}.$$

Puisque cette différence est toujours comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, elle ne peut tendre vers zéro, et par conséquent les sommes des deux séries ne sont pas égales. En prenant trois termes positifs pour un négatif, on aurait une autre série, ayant une autre somme. De même, si l'on prenait 4, 5 . . . termes positifs pour un négatif.

Il existe même des séries convergentes qui donnent lieu à des séries divergentes quand on intervertit d'une certaine manière l'ordre de leurs termes.

Soit la série convergente :

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ etc.}$$

Si l'on groupe les termes comme on l'a fait précédemment ; on a la série :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \text{ etc.}$$

Comme précédemment :

$$f(n) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$\varphi(n) = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$\varphi(n) - f(n) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$$

Cette différence contient encore n termes : Donc elle est plus grande que n fois son dernier terme :

$$\varphi(n) - f(n) > \frac{n}{\sqrt{4n-1}} \text{ et à fortiori}$$

$$> \frac{n}{\sqrt{4n}} \text{ ou } > \frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Pour $n = \infty$, cette différence est plus grande que toute grandeur assignable. Donc $\varphi(n)$ n'a pas de limite.

Mais si l'on considère une série dont la convergence ne dépend pas du signe de ses différents termes, c'est-à-dire dont les termes sont tels que leurs valeurs absolues forment une série convergente, on peut changer d'une manière quelconque l'ordre de ses termes, et la convergence a encore

lieu dans la nouvelle série.

Soit la série convergente :

$u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots\ldots u_n. \quad (u)$

On suppose que les valeurs numériques des divers termes :

$U_1, U_2, U_3 \ldots\ldots\ldots U_n \quad (U)$

forme une série convergente.

Changeons l'ordre des termes de la série (u), de manière par exemple, que le terme qui était de rang n, devienne de rang μ. (à chaque valeur finie et donnée de n, correspond une valeur finie et donnée de μ). On forme ainsi la nouvelle série :

$u_\alpha, u_\beta, u_\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots u_\lambda$

Je prends λ suffisamment grand, pour que parmi les λ premiers termes de la nouvelle série, se trouvent les termes :

$u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots\ldots u_n.$

Alors la somme de ces λ premiers termes contient la somme S_n, en désignant ainsi : $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$, plus, d'autres termes u_p, u_q, etc. les indices p, q, etc. .... étant tous $> n$. On a donc :

$u_\alpha + u_\beta + \cdots + u_\lambda = S_n + u_p + u_q + \cdots + u_\rho.$

Mais, abstraction faite du signe :

$u_p + u_q + \cdots + u_\rho < U_p + U_q + \cdots + U_\rho$

et à fortiori : $\quad < U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_\rho$

en désignant par ρ le plus grand de tous les indices.

Si on appelle R_n le reste de la série (U) bornée à ses n premiers termes, on aura à fortiori :

$u_p + u_q + \cdots + u_\rho < R_n,$

ce que l'on peut exprimer par l'égalité :

$u_p + u_q + \cdots + u_\rho = \pm\,\theta R_n,$

θ désignant une quantité comprise entre 0 et 1. Par conséquent la somme des λ premiers termes de la nouvelle série peut s'écrire :

$$u_\alpha + u_\beta + \cdots\cdots + u_\lambda = S_n \pm \theta R_n .$$

Je fais maintenant grandir n indéfiniment, il est clair alors que λ croît indéfiniment aussi. R_n tend vers sa limite zéro, θ reste toujours compris entre 0 et 1 ; S_n tend vers sa limite $\underline{S}$, qui est la somme de la série. Donc la somme des λ premiers termes de la nouvelle série tend indéfiniment vers la limite S quand λ croît indéfiniment. Par conséquent enfin la nouvelle série est convergente, et a la même somme que la première.

On appelle série imaginaire une série dont le terme général est de la forme :

$$u_n = p_n + q_n \sqrt{-1}$$

La somme S_n des n premiers termes de la série est donc :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) + (q_1 + q_2 + \cdots) \sqrt{-1}$$

ou

$$S_n = P + Q \sqrt{-1} .$$

Si séparément P et Q tendent vers une limite finie et déterminée, S_n tend aussi vers une limite déterminée, et c'est dans ce sens qu'on dit qu'une série imaginaire est convergente.

Une quantité imaginaire de la forme $p + q\sqrt{-1}$, peut s'écrire :

$$p + q\sqrt{-1} = \sqrt{p^2+q^2}\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} + \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\sqrt{-1}\right)$$

Or, $\sqrt{p^2+q^2}$ c'est le module de la quantité imaginaire : désignons-le par ρ ; ensuite $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$ et $\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$ sont deux quan

-ttés toutes deux moindres que l'unité, et dont la somme des carrés est égale à l'unité. On peut donc considérer ces quantités, l'une comme le cosinus, l'autre comme le sinus d'un même angle ω, angle qui est unique si on ne sort pas des limites d'une circonférence. La quantité imaginaire peut donc se mettre sous la forme:

$$p+q\sqrt{-1} = \rho\,(\cos.\omega + \sqrt{-1}\,\sin.\omega)$$

et alors:

$$(1)\quad p_1+p_2+\cdots+p_n = \rho_1\cos.\omega_1 + \rho_2\cos.\omega_2 + \cdots + \rho_n\cos.\omega_n$$

$$(2)\quad q_1+q_2+\cdots+q_n = \rho_1\sin.\omega_1 + \rho_2\sin.\omega_2 + \cdots + \rho_n\sin.\omega_n$$

De là résulte ce théorème remarquable:

Si la série des modules:

$$(3)\qquad \rho_1\ ,\ \rho_2\ ,\ \rho_3\ \cdots\cdots\ \rho_n$$

est convergente, la série imaginaire est elle-même convergente.

En effet les quantités $\rho_1, \rho_2, \cdots\cdots \rho_n$ sont essentiellement positives. Or, les termes de la série (1) s'obtiennent en multipliant les termes de la série (3) respectivement par les facteurs:

$$\cos.\omega_1\ ,\ \cos.\omega_2\ ,\ \cdots\cdots\ \cos.\omega_n$$

et ceux de la série (2) s'obtiennent en multipliant les mêmes termes, respectivement par les facteurs:

$$\sin\omega_1\ ,\ \sin.\omega_2\ ,\ \cdots\cdots\ \sin.\omega_n$$

facteurs qui sont positifs ou négatifs, mais dont les valeurs numériques sont inférieures à une limite qui est l'unité. Par conséquent, d'après un théorème démontré, les séries (1) et (2) sont convergentes, et par suite il en est de même de la série imaginaire.

Les séries imaginaires jouissent des propriétés analogues à celles des séries réelles:

Soit la série :

$$a, ax, ax^2, ax^3, \ldots\ldots\ldots ax^{n-1}$$

dans laquelle a et x sont de la forme :
$\alpha + \beta\sqrt{-1}$. Je dis que cette série imaginaire est convergente si le <u>module</u> de x est plus petit que l'unité.

En effet :

$$a(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) = a\frac{1-x^n}{1-x}$$

$$= S_n = \frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x}.$$

Or, x^n a pour module la $n^{ème}$ puissance du module de x, et puisque par hypothèse le module de x est < 1, le module de x^n a pour limite zéro quand n croît indéfiniment. Donc il en est de même du module de la quantité $\frac{ax^n}{1-x}$. Mais si pour $n = \infty$ le module de $\frac{ax^n}{1-x}$ s'annulle, $\frac{ax^n}{1-x}$ s'annulle aussi.

Donc : lim. $S_n = \frac{a}{1-x}$, limite qui a la même forme que pour les séries géométriques réelles.

Soient les deux séries :

$$u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots u_n$$

$$v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots v_n$$

Si on forme une nouvelle série en faisant la somme de deux termes de même rang dans ces deux séries ; c'est-à-dire dont le terme général soit : $u_n + v_n$, je dis que la nouvelle série est convergente, si les deux premières le sont elles-mêmes. En effet, la somme S''_n des n premiers termes de la nouvelle série, est égale à

$$S_n + S'_n.$$

Mais S_n et S'_n ont respectivement pour limite S et S', il s'ensuit que S''_n a une limite, et que cette limite est $S + S'$. La nouvelle série est donc convergente, et elle a pour

somme la quantité qu'on obtient en ajoutant à l'autre les sommes des deux premières séries.

Si on multiplie par A tous les termes d'une série dont la somme est S, on a une nouvelle série qui a pour somme AS.

En effet, la somme S'_n des n premiers termes de la nouvelle série, est égale à :

$$S'_n = A S_n .$$

La limite de S_n est S, donc S'_n a une limite qui est AS. ce qu'il fallait démontrer.

Proposons-nous de trouver vers quelle limite tend l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ quand m croît indéfiniment.

1. Supposons d'abord que m tende vers l'infini en restant toujours entier et positif.

On a dans ce cas :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{m^2} +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{m^3} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots n}\cdot\frac{1}{m^n} + \ldots + \frac{1}{m^m}$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{1.2..n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right) + \ldots + \frac{1}{m^m}.$$

Je suppose que le nombre n soit fixe, et je considère le terme de rang n+1, qui est :

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right).$$

Quand m augmente, n restant fixe, ce terme augmente, car tous les facteurs $\left(1-\frac{1}{m}\right)$ etc. ... $\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$ augmentent et

tend vers l'unité. Par conséquent, lorsque m augmente, la quantité $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ augmente pour une double raison; d'abord parceque le nombre des termes du développement devient de plus en plus grand, ensuite parceque chacun de ces termes va en augmentant. Mais cette quantité ne croît pas indéfiniment, car elle est toujours moindre évidemment que la quantité :

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\dots\dots+\frac{1}{1.2.3\dots(m-1)m}$$

Et si on considère la série indéfinie :

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\text{etc.}\dots$$ qui est convergente,

et dont nous désignerons désormais la somme par e on aura à fortiori :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < e.$$

Par conséquent $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tend vers une limite qui est, ou égale à e, ou moindre que ce nombre.

Mais, il est clair que :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\dots+\frac{1}{1.2..n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right).$$

Car il reste encore des termes à ajouter pour avoir le développement complet. D'ailleurs n restant toujours fixe, et m croissant indéfiniment, les divers termes du second membre ont respectivement pour limites :

$$1,\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{1.2},\ \frac{1}{1.2.3}\ \dots\dots\dots,\ \frac{1}{1.2\dots n}.$$

En désignant par ε la somme des différences qui existent entre ces termes et leurs limites ; on aura:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1.2\ldots n}+\varepsilon$$

ε étant d'ailleurs une quantité qui a pour limite zéro quand m croît indéfiniment. Mais.

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1.2..n}+r_{n+1}$$

r_{n+1} étant une quantité qui a pour limite zéro quand n croît indéfiniment.

Il en résulte que :

$$e-\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < r_{n+1}-\varepsilon$$

Si maintenant on fait croître m et n indéfiniment, le second membre a pour limite zéro. Par conséquent le premier membre a aussi la même limite. Donc enfin

$$e=\lim.\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

La démonstration précédente, ainsi qu'on a pu le voir, se compose de deux parties : dans la première on fait voir que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, quand m grandit indéfiniment, tend vers une limite qui est égale au nombre e, ou moindre que ce nombre ; dans la seconde on prouve que cette limite est le nombre e lui même. La démonstration suivante, qui a l'avantage d'ailleurs d'être plus courte, trouve la limite e, en même temps qu'elle constate son existence.

m étant entier et positif, on a toujours :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2\ldots 3}\,\frac{1}{m^3}$$

$$+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}\cdot\frac{1}{m^n}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{m^m}.$$

Le terme de rang $n+1$ est :

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots n}\cdot\frac{1}{m^n}$$

et le terme suivant :

$$T'_{n+2} = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)(m-n)}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots n(n+1)}\cdot\frac{1}{m^{n+1}}$$

Par suite : $\dfrac{T_{n+2}}{T_{n+1}} = \dfrac{m-n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{m}$.

On voit donc qu'un terme quelconque s'obtient en multipliant le précédent par : $\frac{m-n}{n+1}\cdot\frac{1}{m}$. Si donc au lieu de multiplier le terme précédent par $\frac{m-n}{m(n+1)}$, on le multipliait par $\frac{m}{m(n+1)}$ ou bien $\frac{1}{n+1}$ on obtiendrait un résultat plus grand que le terme suivant. Il suit de là que les termes du développement à partir de T_{n+1} sont tous moindres que ceux d'une série géométrique dont le premier terme est : $\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots n}\cdot\frac{1}{m^n}$ et dont la raison est $\frac{1}{n+1}$.

Donc, à fortiori, ces mêmes termes à partir de T_{n+1}, considérés dans leur ensemble, sont moindres que la somme de cette même série géométrique, somme qui est :

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2\ldots\ldots n}\cdot\frac{1}{m^n}\cdot\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ldots\ldots n}\cdot\frac{1}{m^n}\cdot\frac{1}{n}.$$

Si donc on désigne par θ une quantité comprise entre zéro et un, le développement de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ pourra se mettre sous la forme :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\left(1+\frac{\theta}{n}\right).$$

Supposons maintenant $\underline{n}$ fixe, et faisons croître m indéfiniment : les facteurs :

$$1-\frac{1}{m},\ 1-\frac{2}{m},\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ 1-\frac{n-1}{m}$$

tendent tous vers leur limite commune qui est l'unité. Quant à la quantité θ, elle varie mais reste toujours comprise entre 0 et 1. Si donc ε_n représente une quantité dont la limite est zéro, quand m croît indéfiniment, on aura

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.2\ldots n}\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)+\varepsilon_n.$$

Maintenant e désignant la somme de la série indéfinie : $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+$ etc. on a :

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.2\ldots n}+r_{n+1}.$$

Donc : $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e - r_{n+1} + \frac{\lambda}{1.2\ldots n}+\varepsilon_n$

Maintenant il est clair qu'on peut prendre m et n assez grands pour que le second membre diffère de e d'aussi peu qu'on voudra :

Donc enfin : $\lim.\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$

Quand m croît indéfiniment en restant toujours entier et positif.

2. Supposons que m soit positif, mais non entier. Soit donc $m=n+p$; n étant entier et positif, et p compris entre 0 et 1. Alors : $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1+\frac{1}{n+p}\right)^{n+p}$.

La quantité : $\left(1+\frac{1}{n+p}\right)^{n+p}$ sera aggrandie si on aggrandit la quantité entre parenthèses en même temps que l'exposant de la puissance, et de même elle sera diminuée, si on diminue simultanément la quantité entre parenthèses et l'exposant :

Donc :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \text{ ou } < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \text{ ou } > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}.$$

Faisons n et par conséquent m, infini. Alors, d'après ce qui précède : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ tendent vers e. Quant aux facteurs : $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}$, ils tendent vers l'unité.

Donc, les deux limites de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ deviennent toutes deux égales à e. Donc $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ devient lui-même égal à e, pour $m=\infty$.

3. Enfin, supposons que m soit négatif ; soit : $m=-n$, n étant entier ou non entier.

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \times \left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

On voit, d'après cette forme, donnée à l'expression que quand n croît indéfiniment, l'un des facteurs tend vers e, et le second tend vers l'unité.

Donc enfin, la limite de l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, quand m devient infini, quelle que soit d'ailleurs la manière dont il varie, est un nombre e, incommensurable, et compris entre 2 et 3 ainsi qu'il est facile de le démontrer.

Logarithmes.

On considère très-souvent en analyse le système des logarithmes dont la base est le nombre e, et qu'on désigne

sous le nom de système népérien. Nous désignerons par les trois lettres log. les logarithmes pris dans le système népérien, et la majuscule L sera réservée pour les logarithmes pris dans une base quelconque.

Soit x un nombre, Lx son logarithme dans un système à base quelconque. Il faut d'après la définition, pour avoir la différentielle de Lx, chercher sa dérivée, et la multiplier par dx. Soit donc h l'accroissement donné à x, il faut chercher la limite de l'expression :

$$\frac{L(x+h)-Lx}{h}$$ quand h tend vers zéro. Posons $\frac{h}{x}=\frac{1}{m}$.

D'après cette relation, on voit que pour faire tendre h vers zéro, il suffira de faire croître m indéfiniment. Nous aurons donc à chercher la limite de l'expression :

$$\frac{L\left(x+\frac{x}{m}\right)-Lx}{\frac{x}{m}},$$ quand m croît indéfiniment.

Or, cette expression est égale à :

$$m.\frac{L\left(x+\frac{x}{m}\right)-Lx}{x}=m.\frac{L\left(1+\frac{1}{m}\right)}{x}=\frac{L\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}{x}.$$

Or, d'après ce qui précède, la limite du numérateur est Le. Donc la dérivée de Lx, est $\frac{Le}{x}$. Donc aussi sa différentielle est $\frac{Le\,dx}{x}$, $dLx=\frac{Le\,dx}{x}$.

Et cela a lieu quel que soit m, et, par conséquent, quel que soit h. Ainsi, pour la fonction Lx, et cela est très important, la différentielle est indépendante du signe que prend h quand il tend vers zéro.

Si au lieu de x, on avait une fonction de cette variable, u par exemple, on aurait, d'après un théorème géné-

-ral qui a été démontré :

$$dLu = \frac{Le\,du}{u}$$

Car la dérivée d'une fonction est toujours quelle que soit la variable indépendante de la forme $f'(x)dx$.

Ainsi, la règle pour la différentiation des fonctions logarithmiques est celle-ci.

La différentielle du logarithme d'une fonction, est égale au logarithme du nombre e, multiplié par la différentielle de la fonction, et divisé par cette fonction.

Si les logarithmes sont pris dans le système népérien, c'est-à-dire, si e est la base. Alors $Le = \log. e = 1$, et par conséquent $d \log. u = \frac{du}{u}$. Ainsi :

La différentielle du logarithme népérien d'une fonction est égale à la différentielle de la fonction divisée par cette fonction.

Cette seconde règle peut se démontrer directement, et si on la suppose démontrée, je dis qu'on peut en déduire la règle de différentiation pour un système quelconque de logarithmes. En effet, par définition, on a :

$$e^{\log. u} = u.$$

car $\log. u$ est le nombre qui exprime à quelle puissance, il faut élever e, pour avoir le nombre u. On tire de cette égalité, en prenant les logarithmes dans un système quelconque :

$$\log. u \, Le = Lu.$$

Donc $\log. u = \frac{Lu}{Le}$. Par suite, on a :

$$d\frac{Lu}{Le} = \frac{du}{u} \text{ d'où } dLu = \frac{Le\,du}{u}$$

Ce qui démontre la règle générale.

Exponentielles.

On appelle fonction exponentielle, une fonction telle que a^u, dans laquelle la base a est en général une constante, et u une variable.

Soit $y = a^u$. On demande la différentielle de y. Or u est le logarithme du nombre y, dans le système dont la base est a savoir : $u = Ly$.

Donc $du = dLy = \dfrac{Le\,dy}{y}$.

De cette équation on tire la valeur de dy qui est l'inconnue, et on a

$$dy = y.\frac{du}{Le} \text{ or } y = a^u. \text{ Donc:}$$

$$dy = a^u\,\frac{du}{Le}$$, c'est là une valeur de la différentielle cherchée ; mais on la met en général sous une autre forme, en introduisant les logarithmes népériens qui sont ceux dont on se sert ordinairement dans les formules. Pour cela, on se sert de l'équation identique : $a^{Le} = e$. On en déduit en prenant les logarithmes népériens des deux membres :

$$Le.\log.a = 1. \text{ d'où } \log.a = \frac{1}{Le}.$$

Donc la formule de différentiation devient :

$$dy = da^u = a^u \log.a\,du.$$

Ainsi, règle : La différentielle d'une exponentielle dont la base est constante, est égale à l'exponentielle

multipliée par le logarithme népérien de la base, et par la différentielle de l'exposant.

Si la base est celle des logarithmes népériens, savoir, $a = e$, alors $\log. a = 1$ et on a : $de^u = e^u du$.

La différentielle d'une exponentielle dont la base est égale à celle des logarithmes népériens, est égale à cette exponentielle multipliée par la différentielle de l'exposant.

Soit maintenant l'exponentielle v^u, v et u étant des fonctions d'une certaine variable : cherchons la différentielle de v^u.

Or, le logarithme népérien de v^u est $u \log. v$. Donc on a l'équation identique : $v^u = e^{u \log. v}$.

On est ainsi ramené au cas d'une exponentielle à base constante. Donc :

$$dv^u = de^{u \log. v} = e^{u \log. v} \times d(u \log. v)$$

$$dv^u = e^{u \log. v}(\log. v\, du + u\, d\log. v) = v^u(\log. v\, du + u \frac{dv}{v}).$$

$$dv^u = v^u \log. v\, du + u v^{u-1} dv.$$

On voit que cette différentielle se compose de deux parties, et on peut donner pour ce cas la règle suivante :

Pour différentier une exponentielle dont la base et l'exponentielle sont variables, il faut prendre la différentielle d'abord comme si la base était constante et l'exposant seul variable, plus la différentielle comme si l'exposant et la base variable, c'est-à-dire suivant la règle des puissances

Soit à différentier la fonction:

$$y = \log.\,(x+\sqrt{1+x^2}).$$

On aura: $dy = \dfrac{d\,(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$dy = \frac{dx + \dfrac{d(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{dx + \dfrac{2x\,dx}{2\sqrt{1+x^2}}}{}$$

$$= \frac{dx\,(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}\,(x+\sqrt{1+x^2})} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Résultat simple, et qui doit être remarqué parce que plus tard on aura besoin de savoir quelle est la fonction qui a pour différentielle: $\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Fonctions trigonométriques.

La différentiation du sinus, de laquelle on déduit la différentiation de toutes les autres fonctions trigonométriques, est fondée sur un lemme important qu'il suffira de rappeler, savoir:

Le rapport du sinus à l'arc a pour limite l'unité quand l'arc décroît jusqu'à zéro. Cela est vrai que l'arc soit positif ou négatif avant de s'évanouir.

Pour trouver la différentielle de sin. x, x étant la variable indépendante, cherchons d'abord la dérivée de sin. x. Formons donc le rapport:

$$\frac{\sin.(x+h) - \sin.\,x}{h},$$

h étant l'accroissement arbitraire donné à x, et

cherchons vers quelle limite tend ce rapport, quand h diminue jusqu'à zéro.

Or, on a, par une formule trigonométrique :

$$\frac{\sin.(x+h)-\sin.x}{h}=\frac{2\cos.\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=\cos.\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin.\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

Sous cette forme, on voit clairement que si l'on fait tendre h vers zéro, le premier facteur a pour limite $\cos.x$, l'autre, d'après le lemme qui a été rappelé a pour limite l'unité.

Donc : $d\sin.x=\cos.x\,dx$.

Donc aussi, u étant une fonction quelconque de la variable indépendante x, on a :

$$d\sin.u=\cos.u\,du.$$

Car d'après ce qui a été démontré généralement, l'équation : $df(x)=f'(x)dx$ entraîne toujours l'équation :

$$df(u)=f'(u)du.$$

Règle : La différentielle du sinus d'un arc est égale au cosinus, multiplié par la différentielle de l'arc.

Il ne faut pas oublier que l'arc est toujours pris dans un cercle dont le rayon est égal à l'unité de longueur.

On peut pour trouver la différentielle de $\cos.u$, suivre plusieurs méthodes. Celle qui conduit le plus rapidement au résultat, consiste à regarder le cosinus de u comme le sinus de l'arc complémentaire, et alors la différentiation se fait d'après la règle précédente.

$$d\cos.u=d\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)d\left(\frac{\pi}{2}-u\right).$$

Donc $d\cos. u = -\sin. du$.

Règle : La différentielle du cosinus d'un arc est égale au sinus pris en signe contraire, multiplié par la différentielle de l'arc.

On peut arriver au même résultat, en faisant pour le cosinus un calcul analogue à celui qui a été fait pour le sinus. On peut aussi partir de la relation connue :

$$\sin^2 u + \cos.^2 u = 1.$$

Cette fonction étant constante, sa différentielle est nulle. Donc :

$$d\,(\sin^2 u + \cos.^2 u) = 0$$

ou $\quad 2\sin. u\, d\sin. u + 2\cos. u\, d\cos. u = 0.$

Or, $d\sin. u = \cos. u\, du$.

En supprimant le facteur $2\cos. u$, il vient :

$$\sin. u\, du + d\cos. u = 0$$

d'où : $\quad d\cos. u = -\sin. u\, du.$

Plusieurs méthodes peuvent également conduire à la différentielle de la tangente.

La plus rapide consiste à regarder la tangente comme le rapport du sinus au cosinus ; on a ainsi :

$$d\,tg. u = d\frac{\sin. u}{\cos. u} = \frac{\cos. u\, d\sin. u - \sin. u\, d\cos. u}{\cos.^2 u}$$

$$= \frac{\cos.^2 u\, du + \sin^2 u\, du}{\cos.^2 u} = \frac{du}{\cos.^2 u}.$$

La différentielle de la tangente d'un arc est égale à la différentielle de l'arc, divisée par le carré du cosinus.

En regardant la cotangente d'un arc comme la tangente de l'arc complémentaire, on a :

$$d\cot.u = d\,tg.\left(\frac{\pi}{2}-u\right) = \frac{d\,tg.\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\cot.^2\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}$$

Donc. $d\cot.u = \dfrac{-du}{\sin^2 u}$.

La différentielle de la cotangente d'un arc est égale à la différentielle de l'arc, prise en signe contraire, et divisée par le carré du sinus.

Par une formule connue de trigonométrie, on a :

$\sec.u = \dfrac{1}{\cos.u}$. Donc :

$$d\sec.u = d\frac{1}{\cos.u} = \frac{-d\cos.u}{\cos^2 u} = \frac{\sin.u\,du}{\cos^2 u} = tg.u\,\sec.u\,du.$$

La différentielle de la sécante d'un arc est égale au produit de la tangente, de la sécante et de la différentielle de l'arc.

Pour la cosécante, le calcul et le résultat sont analogues.

$$d\,\mathrm{coséc}.u = d\,\mathrm{séc}\left(\frac{\pi}{2}-u\right) = tg.\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\mathrm{séc}.\left(\frac{\pi}{2}-u\right) = -\cot.u.\mathrm{coséc}.u\,du.$$

ou bien encore,

$$d\,\mathrm{coséc}.u = d\frac{1}{\sin.u} = \frac{-d\sin.u}{\sin^2 u} = \frac{-\cos.u\,du}{\sin^2 u} = -\cot.u.\,\mathrm{coséc}.u.\,du.$$

La différentielle de la cosécante d'un arc est égale au produit, pris en signe contraire, de la cotangente, par la cosécante et par la différentielle de l'arc.

En réunissant les six formules de différentiation on a.

$d\sin.u = \cos.u\,du$ $\qquad$ $d\cos.u = -\sin.u\,du.$

$d\,tg.u = \dfrac{du}{\cos.^2 u}$ $\qquad$ $d\cot.u = -\dfrac{du}{\sin^2 u}$

$d\,\mathrm{séc}.u = tg.u\,\mathrm{séc}.u.du$ $\qquad$ $d\,\mathrm{coséc}\,u = -\cot.u.\,\mathrm{coséc}.u.\,du$

Trois de ces formules ont dans leur second membre le

signe + en évidence ; dans les trois autres, c'est le signe —. Il est facile de se rendre compte de ce fait ; en effet, prenons pour fixer les idées, un arc u dans le premier quadrant. Dans ce cas toutes les lignes trigonométriques de l'arc sont positives ; de plus, si on fait croître l'arc u, auquel cas du est positif, le sinus, la tangente et la sécante vont en croissant, tandis que le cosinus, la cotangente et la cosécante vont en décroissant. Donc, d'après le théorème qu'on a vu sur les fonctions croissantes, les différentielles du sinus de la tangente et de la sécante, sont > 0, tandis que les différentielles des trois autres fonctions sont négatives. Résultat indiqué par les formules.

On verrait en discutant de même les variations des lignes trigonométriques dans les autres quadrants, que les signes explicites des seconds membres combinés avec les signes implicites des fonctions trigonométriques, donnent aux diverses différentielles le signe qui leur convient.

Pour désigner l'arc dont le sinus est égal à une quantité donnée u, on écrit : $y = \text{arc.}\sin.\, u$.

Il résulte immédiatement de là, par définition, $u = \sin.\, y$.

Les notations :

$\text{arc}\cos.u$, $\text{arc}\,\text{tg}.u$, $\text{arc}\cot.u$, $\text{arc}\sec u$ etc.

auront des significations analogues.

Les quantités représentées par ces symboles sont évidemment des fonctions de u ; car elles varient quand u varie lui-même. Proposons nous de trouver leurs différentielles.

Soit $y = \text{arc. sin.}\, u$, il en résulte :

$$u = \sin.\, y \ : \ du = d \sin.\, y = \cos.\, y \; dy.$$

d'où $dy = \dfrac{du}{\cos.\, y}$. Mais puisque $u = \sin.\, y$ $\cos.\, y = \sqrt{1-u^2}$.

Par conséquent, dy ou $d \,\text{arc sin.}\, u = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

Le radical $\sqrt{1-u^2}$ emporte avec lui le double signe $\pm$; c'est la situation de l'arc y sur la circonférence qui fera choisir pour ce radical le signe $+$ ou le signe $-$. Cette ambiguïté de signes tient à ce que la quantité donnée est le sinus u. Il y a dès-lors une infinité d'arcs qui sont donnés, et qui ont tous u pour sinus. Si y désigne l'un quelconque d'entre eux, tous ces arcs sont compris dans les deux séries d'arcs représentées par les formules generales :

$$(2K\pi + y \quad , \quad (2K+1)\pi - y.$$

K étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif, ces arcs sont en nombre infini, mais leurs différentielles sont ou egales, ou égales au signe près. Car ces différentielles sont :

$$d\left\{2K\pi + y\right\} = +\, dy \quad \text{et}$$
$$d\left\{2K\pi + 1)\pi - y\right\} = -\, dy.$$

Ce sont ces deux différentielles que donne la formule :

$$d \,\text{arc sin.}\, u = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Soit $y = \text{arc cos.}\, u$, donc $u = \cos.\, y$

$du = d\cos.\, y = -\sin.\, y\; dy$; d'où $dy = -\dfrac{du}{\sin.\, y}$. Or

$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-u^2}$.

Donc $dy = d\,\text{arc cos.}\, u = -\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

Le radical $\sqrt{1-u^2}$ emporte avec lui un double signe qui se discuterait d'une manière analogue à ce qui a été fait précédemment.

Soit $y = \text{arc tg.}\, u$, donc $u = \text{tg.}\, y.\ du = d\,\text{tg.}\, y = \dfrac{dy}{\cos.^2 y}$. d'où $dy = du \cos^2 y$. Mais, puisque $\text{tg.}\, y = u$, $\cos.^2 y = \dfrac{1}{1+u^2}$.

Donc : $dy = d\,\text{arc tg.}\, u = \dfrac{du}{1+u^2}$.

Ici il n'y a pas d'ambiguïté de signe, car quand la tangente est donnée, les arcs qui y répondent sont compris dans la formule $K\pi + y$, arcs en nombre infini, mais ayant tous pour différentielle : $d\,(K\pi + y) = dy$.

Soit $y = \text{arc cot.}\, u$, $u = \text{cot.}\, y$, $du = d\,\text{cot.}\, y = \dfrac{-dy}{\sin^2 y}$. Donc : $dy = -du \sin^2 y$. Mais puisque $\text{cot.}\, y = u$ $\sin^2 y = \dfrac{1}{1+u^2}$.

Donc enfin, $dy = d\,\text{arc cot.}\, u = -\dfrac{du}{1+u^2}$.

Soit $y = \text{arc séc.}\, u$, $u = \text{séc.}\, y$. $du = d\,\text{séc.}\, y = \text{tg.}\, y\ \text{séc.}\, y\, dy$.

Donc $dy = \dfrac{du}{\text{tg.}\, y\ \text{séc.}\, y}$. Mais $\text{séc.}\, y = u$. Donc $\text{tg.}\, y = \sqrt{u^2-1}$, à cause du triangle rectangle formé par le rayon, la tangente et la sécante.

Donc $dy = d\,\text{arc séc.}\, u = \dfrac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$.

Soit $y = \text{arc coséc.}\, u$. Par définition, il en résulte que $u = \text{coséc}\, y$, et par suite $dy = \dfrac{-du}{\text{cot.}\, y\ \text{coséc.}\, y}$. Or, $\text{coséc.}\, y = u$, et par conséquent $\text{cot.}\, y = \sqrt{u^2-1}$.

Donc $dy = d\,\text{arc coséc.}\, u = \dfrac{-du}{u\sqrt{u^2-1}}$.

Les formules de différentiation des fonctions trigonométriques inverses sont donc :

$$d\,\text{arc sin.}\,u = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},\quad d\,\text{arc cos.}\,u = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$d\,\text{arc tg.}\,u = \frac{du}{1+u^2},\quad d\,\text{arc cot.}\,u = -\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$d\,\text{arc séc.}\,u = \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}},\quad d\,\text{arc coséc}\,u = -\frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}.$$

Il n'y a aucun avantage à traduire ces formules en langage ordinaire.

On voit que ces diverses différentielles sont deux à deux égales au signe près.

Cela est vrai pour toutes les fonctions trigonométriques quand l'arc y est donné sur la circonférence. La raison en est facile à donner ; prenons, par exemple, la tangente et la cotangente, pour lesquelles il n'y a pas de radicaux, et pour lesquelles par conséquent la conclusion est plus évidente. On a, par définition,

$$\frac{\pi}{2} - \text{arc tg.}\,u = \text{arc cot.}\,u.$$

Par conséquent :

$$d\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg.}\,u\right) = d\,\text{arc cot.}\,u. \quad \text{Ou bien,}$$

$$d\,\text{arc cot}\,u = -\,d\,\text{arc tg.}\,u.$$

Soit : $y = d\left\{\sin.\left[x^2+\log.(1+e^{x^3})\right] + \sqrt{\text{arc sin}(1+x^2)+\log\text{arc tg.}(1+\sqrt[3]{x}}\right\}$

En appliquant les règles de différentiation qui ont été démontrées, on trouve :

$$y = \cos.\left[x^2+\log.(1+e^{x^3})\right]\left(2x\,dx + \frac{e^{x^3}.\,3x^2\,dx}{1+e^{x^3}}\right) +$$

$$+\frac{\dfrac{2x\,dx}{\sqrt{1-(1+x^2)^2}}+\dfrac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx}{\text{arc.tg.}(1+\sqrt[3]{x})\left[1+(1+\sqrt[3]{x})^2\right]}}{2\sqrt{\text{arc sin.}(1+x^2)+\log.\text{arc.tg.}(1+\sqrt[3]{x})}}.$$

Différentielles des fonctions de plusieurs fonctions.

Le théorème suivant, qui est très important, n'est qu'une généralisation du principe des fonctions de fonctions qui a été démontré.

Soit la fonction $f(u,v)$, u et v étant des fonctions d'une même variable x; la dérivée par rapport à x de la fonction $f(u,v)$ est égale à la somme des dérivées qu'on obtient en regardant successivement chaque variable u et v, comme unique.

En d'autres termes, on prendra la dérivée par rapport à u, $f'_u(u,v)$, comme si v était constant et u seul variable, puis la dérivée par rapport à v, $f'_v(u,v)$ comme si u était constant et v seul variable. La somme de ces deux résultats sera le résultat demandé.

$$f'(u,v)=f'_u(u,v)+f'_v(u,v).$$

En effet, u et v étant des fonctions d'x, si on donne à x l'accroissement Δx, il en résultera pour u et v les accroissements correspondants Δu et Δv. La dérivée cherchée, savoir la dérivée de $f(u,v)$ par rapport à x, est égale à la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, quand ce dernier accroissement tend vers zéro.

$$f'(u,v)=\lim.\frac{f(u+\Delta u,\ v+\Delta v)-f(u,v)}{\Delta x}.$$

Cherchons donc ce rapport. Pour cela, considérons dans la fonction proposée, u et v, comme des lettres, sans nous occuper si elles sont ou non des fonctions d'x. Supposons d'abord que u seul soit variable, et que $v+\Delta v$ soit une quantité constante : alors en vertu de l'équation générale :

$$F(x+h)-F(x)=h\left\{F'(x)+\varepsilon\right\}$$

On a l'équation identique :

$$(1)\quad f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u, v+\Delta v)=\Delta u\left\{f'_u(u, v+\Delta v)+\alpha\right\}$$

α s'évanouissant en même temps que Δu :

Et si maintenant on suppose que u soit constant, et que v soit variable, on aura d'après la même équation :

$$(2)\quad f(u; v+\Delta v)-f(u, v)=\Delta v\left\{f'_v(u, v)+\beta\right\}$$

β s'évanouissant en même temps que Δv. Les équations (1) et (2) expriment des identités, et ont lieu, quels que soient u et v. Si on les ajoute membre à membre, on a l'équation identique :

$$(3)\quad f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u, v)=\left\{f'u(u, v+\Delta v)+\alpha\right\}+\Delta v\left\{f'_v(u, v)+\beta\right\}.$$

Si maintenant on suppose que u et v sont des fonctions d'x, Δu et Δv, et par suite α et β, s'évanouissent en même temps que Δx. Admettons en outre, (et c'est ce qui arrivera dans la plupart des cas) que $f'(u, v)$ soit une fonction continue de v ; on pourra alors écrire :

$$f'_u(u, v+\Delta v)=f'_u(u, v)+\gamma$$

γ étant une quantité qui décroît en même temps que Δv et qui s'évanouit pour $\Delta v=0$. Si la fonction $f'_u(u, v)$ était discontinue par rapport à v, γ passerait subitement d'une valeur déterminée, à zéro,

et la suite du raisonnement ne saurait être appliquée dans ce cas.

En divisant alors par Δx les deux membres de l'équation (3), on a :

$$\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u,v)}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\left\{f'_u(u,v)+\gamma+\alpha\right\}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\left\{f'_v(u,v)+\beta\right\}.$$

Faisons tendre Δx vers zéro ; alors Δu et Δv, et par conséquent, α, β, γ tendent eux-mêmes vers zéro. On a donc entre les limites des deux membres, l'équation.

$$f'(u,v)=f'_u(u,v)\frac{du}{dx}+f'_v(u,v)\frac{dv}{dx}.$$

Multiplions par dx pour avoir la différentielle et nous aurons :

$$df(u,v)=f'_u(u,v)\frac{du}{dx}dx+f'_v(u,v)\frac{dv}{dx}dx.$$

Mais $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, ainsi qu'on l'a vu, peuvent être considérés respectivement comme les quotients de du et de dv par dx. Donc enfin :

$$df(u,v)=f'_u(u,v)\,du+f'_v(u,v)\,dv.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Soit une fonction $f(u,v,w)$, u, v, w étant des fonctions d'une même variable x, la différentielle de $f(u,v,w)$ est égale à la somme des différentielles partielles obtenues en regardant successivement chaque variable comme unique.

Les raisonnements et la démonstration se font absolument comme dans le cas qui précède. Soit Δx l'accroissement arbitraire donné à x ; comme u, v, w, sont des fonctions d'x, il en résultera pour ces fonctions

les accroissements correspondants $\Delta u, \Delta v, \Delta w$. Or, la dérivée de la fonction par rapport à x, c'est :

$$\lim. \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v, w)}{\Delta x}$$

quand Δx tend vers zéro

Comme précédemment, on aura les trois équations identiques :

$$(1)\ f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v+\Delta v, w+\Delta w) = \Delta u \left\{ f'_u(u, v+\Delta v, w+\Delta w) + \alpha \right\}$$

$$(2)\ f(u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v, w+\Delta w) = \Delta v \left\{ f'_v(u, v, w+\Delta w) + \beta \right\}$$

$$(3)\ f(u, v, w+\Delta w) - f(u, v, w) = \Delta w \left\{ f'_w(u, v, w) + \gamma \right\}$$

Ces trois équations ont lieu, quels que soient u, v, w, même dans le cas où ces trois variables seraient indépendantes les unes des autres ; α est d'ailleurs une quantité qui s'évanouit avec Δu ; β et γ sont des quantités analogues qui s'annullent respectivement en même temps que Δv et Δw. Mais dans l'hypothèse actuelle, savoir u, v, w, étant des fonctions d'x, $\Delta u, \Delta v, \Delta w$, et par conséquent α, β, γ, s'évanouissent simultanément et en même temps que Δx.

J'ajoute membre à membre les équations (1), (2), (3) et il vient :

$$(4)\ f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v, w) = \Delta u \left\{ f'_u(u, v+\Delta v, w+\Delta w) + \alpha \right\} + \Delta v \left\{ f'_v(u, v, w+\Delta w) + \beta \right\} + \Delta w \left\{ f'_w(u, v, w) + \gamma \right\}.$$

Il arrivera dans la plupart des cas que la fonction $f(u, v, w)$ est continue par rapport à u et à v. Donc, d'après ce qui a été dit, on peut écrire :

$$f_v'(u, v, w+\Delta w) = f_v'(u, v, w) + \delta$$

$$f_u'(u, v+\Delta v, w+\Delta w) = f_u'(u, v, w) + \theta$$

δ et θ étant des quantités qui s'annullent, l'une en même temps que Δw, l'autre avec Δv et Δw. Le premier membre de l'équation (4), c'est l'accroissement de la fonction $f(u, v, w)$. Désignons-le pour abréger par Δf et divisons par Δx, nous aurons :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}\left\{f_u'(u,v,w)+\theta+\alpha\right\} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\left\{f_v'(u,v,w)+\delta+\beta\right\} + \frac{\Delta w}{\Delta x}\left\{f_w'(u,v,w)+\gamma\right\}.$$

Donc en passant aux limites, on a la dérivée de $f(u,v,w)$ par rapport à x ;

$$f'(u,v,w) = f_u'(u,v,w)\frac{du}{dx} + f_v'(u,v,w)\frac{dv}{dx} + f_w'(u,v,w)\frac{dw}{dx}.$$

Multiplions tout par dx, et nous aurons :

$$df(u,v,w) = f_u'(u,v,w)\,du + f_v'(u,v,w)\,dv + f_w'(u,v,w)\,du.$$

Ainsi qu'on a pu le voir dans ce dernier exemple, la notation ordinaire de la dérivée est peu commode. On abrège beaucoup l'écriture, en convenant de représenter par $\frac{df}{du}$ la dérivée de la fonction f, prise par rapport à $\underline{u}$. On aura ainsi :

$$df = \frac{df}{du}du + \frac{df}{dv}dv.$$ et dans le cas de trois fonctions u, v, w.

$$df = \frac{df}{du}du + \frac{df}{dv}dv + \frac{df}{dw}dw. \text{ etc} \ldots$$

Il faut bien remarquer ici que $\frac{df}{du}$ est une notation qui résulte d'une convention gratuite, et non d'un théorème comme dans le cas des fonctions à une

seule variable. Aussi serait on conduit à des absurdités si l'on confondait $\frac{df}{du}$ avec le quotient de df par du. Cette confusion, dans le cas des fonctions à une seule variable, conduit à un résultat insignifiant ; mais dans le cas actuel elle conduirait à des résultats inexacts.

Dans la plupart des calculs le sens du raisonnement empêche qu'il y ait aucune ambiguïté à cet égard ; néanmoins si on craignait quelque obscurité, on pourrait désigner par $\frac{df}{du}$ la dérivée de f par rapport à u, et par $\frac{1}{du}\cdot df$ le quotient de df par du. Mais ce qu'il y aura de plus simple, ce sera de mettre mais seulement dans le cas où la confusion sera à craindre un autre signe ∂ : savoir $\frac{\partial f}{\partial u}$ pour désigner la dérivée par rapport à u.

Ce qui précède fait voir comment les raisonnements devraient être faits pour arriver aux théorèmes analogues sur les fonctions de trois, quatre etc, et d'un plus grand nombre de variables.

Fonctions implicites.

Jusqu'à présent, nous ne nous sommes occupés que de la différentiation des fonctions explicites, c'est-à-dire, des fonctions exprimées ou pouvant être exprimées à l'aide des signes employés dans l'algèbre. Proposons nous maintenant de différentier les fonctions qui sont données par des équations non résolues, qu'on n'a

pas voulu ou qu'on n'a pas pu résoudre.

Considérons d'abord le cas d'une équation de deux variables x et y, savoir

(1) $f(x,y)=0.$

Si on regarde x comme l'abscisse, et y comme l'ordonnée d'un même point d'un plan, l'équation (1) est l'équation d'une courbe plane, bien qu'on ne sache pas la résoudre, on peut se proposer de lui mener une tangente. La direction de cette tangente est déterminée par le rapport $\frac{dy}{dx}$. Pour le trouver, on fait le raisonnement suivant, qui est d'ailleurs général.

Quand on donne à x une valeur particulière, il en résulte une ou plusieurs valeurs pour y. Par conséquent y est une fonction d'x. Alors y étant considéré sous ce point de vue, l'équation (1) est une équation en x, et la fonction $f(x,y)$ est une fonction de deux fonctions d'x. Or, sa valeur est constamment nulle. Donc la différentielle est nulle, et on a, ainsi qu'on l'a vu :

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy=0. \qquad \text{d'où l'on tire}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

On voit donc que y est une fonction inconnue d'x, mais la dérivée de cette fonction est connue ; elle est égale au quotient pris en signe contraire de la

dérivée par rapport à x, par la dérivée par rapport à y.

Soit l'équation :

$$y^5 - xy^4 + y^2 - x^3 = 0.$$

On aura, d'après les raisonnements précédents :

$$(5y^4 - 4xy^3 + 2y)\,dy - (y^4 + 3x^2)\,dx = 0$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^4 + 3x^2}{5y^4 - 4xy^3 + 2y}.$$

Il peut se faire aussi qu'on n'ait pas l'équation qui lie x et y : on peut n'avoir que les équations dont on la déduit par l'élimination d'une ou plusieurs autres variables. Par exemple, soient les deux équations :

$$(1)\ f(x, y, z) = 0$$

$$(2)\ F(x, y, z) = 0$$

l'élimination de z entre ces deux équations donnerait la fonction qui lie les variables x et y. Supposons que cette élimination soit impossible. On pourra néanmoins trouver les dérivées prises par rapport à x, des fonctions qui lient y et z à x. En effet, il résulte de ces fonctions elles-mêmes que les équations (1) et (2) peuvent être considérées comme des équations en x, et puisque la valeur de leurs premiers membres est constamment nulle, on a :

$$df(x, y, z) = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0$$

$$dF(x,y,z) = \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0.$$

Ce sont là deux équations du premier degré entre dx, dy, dz, mais des équations qui par leur nature même ne contiennent pas de termes indépendants des inconnues et qui sont propres par conséquent à déterminer les rapports $\frac{dy}{dx}$, et $\frac{dz}{dx}$. On en déduit :

$$\left(\frac{df}{dx}\cdot\frac{dF}{dz} - \frac{df}{dz}\cdot\frac{dF}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\cdot\frac{dF}{dz} - \frac{df}{dz}\cdot\frac{dF}{dy}\right)dy = 0$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{df}{dx}\cdot\frac{dF}{dz} - \frac{df}{dz}\cdot\frac{dF}{dx}}{\frac{df}{dz}\cdot\frac{dF}{dy} - \frac{df}{dy}\cdot\frac{dF}{dz}}.$$

On déduit de là la valeur de $\frac{dz}{dx}$ en changeant y en z, et z en y.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{df}{dx}\cdot\frac{dF}{dy} - \frac{df}{dy}\cdot\frac{dF}{dx}}{\frac{df}{dy}\cdot\frac{dF}{dz} - \frac{df}{dz}\cdot\frac{dF}{dy}}.$$

Ainsi on a :

$$dx : dy : dz :: \frac{df}{dz}\cdot\frac{dF}{dy} - \frac{df}{dy}\cdot\frac{dF}{dz} : \frac{df}{dx}\cdot\frac{dF}{dz} - \frac{df}{dz}\cdot\frac{dF}{dx} : \frac{df}{dx}\cdot\frac{dF}{dy} - \frac{df}{dy}\cdot\frac{dF}{dx}.$$

Si l'on avait n équations entre $n+1$ inconnues,

on arriverait par des raisonnements analogues à n équations du premier degré entre les $n+1$ différentielles $dx, dy, dz \ldots$ etc. équations qui déterminent les rapports $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ etc.

Si le second membre de l'équation était une quantité, savoir $P = Q$, il n'est pas nécessaire, pour prendre la différentielle, de faire tout passer dans le premier membre. Car on aurait : $dP = dQ$ ou $dP - dQ = 0$ ou $d(P-Q) = 0$ ce qui est le résultat obtenu en différentiant l'équation $P - Q = 0$.

Fonctions de plusieurs variables indépendantes.

Désignons par z une fonction de deux variables indépendantes x et y.

$$z = f(x,y)$$

Je donne à x un accroissement arbitraire Δx, et à y un autre accroissement arbitraire Δy, je multiplie Δx et Δy respectivement par les dérivées de z, prises par rapport à x et à y ; je fais la somme des deux produits, et c'est cette somme que j'appelle la <u>différentielle</u> de z.

$$dz = df(x,y) = f'_x(x,y)\,\Delta x + f'_y(x,y)\,\Delta y.$$

Ainsi, on appelle différentielle d'une fonction de deux variables indépendantes, la somme des différentielles partielles qu'on obtient en regardant successivement chacune des variables comme unique.

La fonction <u>x</u> est un cas particulier de la fonction

à deux variables. Sous ce point de vue, on a :

$$df(x,y) = dx = \Delta x$$

et de même, pour le cas particulier où la fonction se réduit à y :

$$dy = \Delta y.$$

Nous pourrons donc écrire :

$$df(x,y) = f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy.$$

Ou d'après la notation admise :

$$df = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy.$$

Cette équation a lieu en vertu d'une définition, et comme on applique cette définition à une fonction qui contient 3, 4, ... un nombre quelconque de variables indépendantes, on a dans tous les cas :

$$df = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{du}du + \text{etc}.$$

Ainsi définie, la différentielle d'une fonction à plusieurs variables indépendantes jouit de propriétés analogues à celles des différentielles des fonctions à une seule variable indépendante.

La limite du rapport de l'accroissement d'une fonction à sa différentielle, est l'unité, quand cet accroissement tend vers zéro.

Soit une fonction à deux variables

$$f(x,y).$$

D'après ce qu'on a vu, l'accroissement Δf de cette fonction peut s'écrire :

$$\Delta f = f(x+dx,\ y+dy) - f(x,y).$$

Or, d'après des raisonnements et des calculs qui ont été déjà faits, on a les deux équations identiques :

) $f(x+dx, y+dy) - f(x, y+dy) = dx\left\{f'_x(x, y+dy) + \alpha\right\}$

) $f(x, y+dy) - f(x, y) = dy\left\{f'_y(x, y) + \beta\right\}$

α s'évanouissant avec dx, et β avec dy. Or, dans la plupart des cas $f'_x(x,y)$ est une fonction continue de y. Admettons que cela ait lieu : On aura :

$$f'_x(x, y+dy) = f'_x(x, y) + \gamma$$

γ étant une quantité qui décroît avec dy, et qui s'évanouit pour $dy = 0$. Alors en ajoutant membre à membre les équations (1) et (2), on a

$f(x+dx, y+dy) - f(x, y)$ c'est-à-dire :

$$\Delta f = dx\left\{f'_x(x,y) + \gamma + \alpha\right\} + dy\left\{f'_y(x, y) + \beta\right\}$$

ou d'après la notation convenue :

$$\Delta f = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + (\alpha+\gamma)dx + \beta dy.$$

Maintenant des deux quantités dx et dy, l'une est plus grande que l'autre, ou bien elles sont égales entre elles. Supposons $dx > dy$ alors $dy = m dx$, m étant < 1, ou tout au plus $= 1$, en valeur absolue, mais d'ailleurs arbitraire. On aura :

$$\Delta f = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + (\alpha+\gamma+m\beta)dx.$$

Donc :

$$\frac{\Delta f}{df} = 1 + \frac{\alpha+\gamma+m\beta}{df}dx.$$

Or, $df = \dfrac{df}{dx}dx + \dfrac{df}{dy}dy$

$$=\left(\frac{df}{dx}+m\frac{df}{dy}\right)dx=\left\{f'_x(x,y)\,m\,f'_y(x,y)\right\}dx$$

Donc:

$$\frac{\Delta f}{df}=1+\frac{\alpha+\gamma+m\beta}{f'_x(x,y)\,m f'_y(x,y)}.$$

Faisons maintenant tendre dx et dy vers zéro: Δf tend lui même vers zéro.

Le numérateur $\alpha+\gamma+m\beta$ décroît indéfiniment tandis que le dénominateur ne devient pas nul.

Donc: $\lim.\dfrac{\Delta f}{df}=1$. Ce qu'il fallait démontrer.

Pour une fonction contenant 3, 4, ... variables indépendantes, la démonstration serait tout-à-fait semblable; en désignant par dx la plus grande des différentielles des diverses variables; on poserait:

$$dy=m dx\ ,\quad dz=n dx,\quad du=p dx.$$

m, n, p étant en valeur absolue <1, et le raisonnement s'achèverait d'une manière analogue.

On n'a pas besoin de règles nouvelles pour la différentiation des fonctions à deux ou plusieurs variables. Car, pour obtenir le résultat cherché, on n'a qu'à ajouter deux résultats qui sont donnés par les règles de différentiation qui ont été vues.

Soit par exemple, $z=3x^2y+6\log.(x^3+7\sin y)+e^{y^2+e^x}$.

On aura pour la différentielle de z:

$$dz=\left(6xy+6.\frac{3x^2}{x^3+7\sin y}+e^{y^2+e^x}.e^x\right)dx$$

$$+\left(3x^2+6.\frac{7\cos.y}{x^3+7\sin y}+e^{y^2+e^x}.2y\right)dy.$$

Si la fonction z n'était pas donnée explicitement, mais liée aux deux variables indépendantes par une équation telle que :

(1) $xyz + \text{arc tg.}(x+z) + \log.(x^2+y^3-z^2) - xy = 0$

bien qu'on ne puisse pas trouver la valeur de z, on obtiendra facilement dz.

Et d'abord si on considère une constante comme un cas particulier d'une fonction à un nombre quelconque de variables, on arrivera à ce théorème.

La différentielle d'une constante est toujours nulle, quel que soit le nombre des variables indépendantes qu'elle contient.

En effet considérons, par exemple, une constante contenant deux variables indépendantes, x et y. Si l'on donne à y des valeurs particulières, la fonction proposée pourra être considérée comme une fonction constante de la variable x. Donc la différentielle prise par rapport à x est nulle. On démontrerait de même que la différentielle par rapport à y est nulle aussi. Donc la différentielle de la fonction proposée est nulle elle-même.

La démonstration serait tout-à-fait semblable pour un plus grand nombre de variables.

Cela posé, dans l'équation (1) regardons z comme une fonction d'x et d'y déterminée par cette équation, la quantité qui est dans le premier membre peut être considérée comme une fonction d'x et d'y. Or, elle a une valeur constamment nulle ; donc la différentielle est nulle.

On prendra la différentielle par rapport à x et à z considéré comme une fonction d'x, savoir :

$$M = yz\,dx + xy\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{dx + \frac{\partial z}{\partial x}\,dx}{1+(x+z)^2} + \frac{2x\,dx - 2z\frac{\partial z}{\partial x}\,dx}{x^2+y^3-z^2} - y\,dx.$$

Puis par rapport à y, et à z considéré comme fonction d'y :

$$N = xz\,dy + xy\frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{dz + \frac{\partial z}{\partial x}\,dx}{1+(x+z)^2} + \frac{3y^2dy - 2z\frac{\partial z}{\partial y}}{x^2+y^3-z^2} - x\,dy.$$

La somme de ces résultats, est nulle, et cela, quelque soient dx et dy. Par exemple cela a lieu pour $dx = 0$ et dy = une quantité différente de zéro; ce qui prouve que le coefficient de dy est nul de lui-même, et que par conséquent celui de dx est nul également. On obtient ainsi deux équations :

$$M = 0 \quad , \quad N = 0,$$

qui donne chacune une dérivée partielle de la fonction z, la première donne $\frac{\partial z}{\partial x}$, dérivée de z par rapport à x; la seconde $\frac{\partial z}{\partial y}$ dérivée par rapport à y. Si on ne veut obtenir que l'une de ces dérivées, ce sera ainsi qu'il faudra traiter l'équation proposée, et le calcul est fini. Mais si on veut la différentielle totale dz, on peut la former en ajoutant membre à membre les équations $M = 0$ et $N = 0$. Car on voit que si dans l'une d'elles se trouve le terme $\alpha\frac{\partial z}{\partial x}dx$, dans l'autre se trouve le terme $\alpha\frac{\partial z}{\partial y}dy$. Termes qui par l'addition donnent

$$\alpha\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \alpha\, dz.$$

Nous allons voir à quoi tient cette circonstance et démontrer qu'elle est générale.

Démontrons d'abord ce théorème :

Soient un nombre quelconque de variables indépendantes $x \ldots y$: Soient $u, v \ldots w$ des fonctions en nombre quelconque de ces variables, pouvant d'ailleurs n'en contenir qu'une seule. Je dis que :

$$df(u, v \ldots w) = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \cdots + \frac{\partial f}{\partial w}dw.$$

En effet, considérons d'abord x comme unique dans la fonction f ; alors la différentielle de cette fonction, est d'après le principe des fonctions de fonctions :

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}dx + \cdots\cdots + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}dx.$$

On aura ainsi, en regardant successivement chaque variable indépendante comme seule dans la fonction f, une série de différentielles partielles dont la dernière sera celle par rapport à y, savoir :

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}dy + \cdots\cdots + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}dy.$$

Si maintenant on fait la somme de tous ces résultats, il est clair qu'on obtiendra d'après la définition, une quantité à la différentielle de la fonction proposée :

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}dx + \cdots + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right\} + \frac{\partial f}{\partial v}\left\{\frac{\partial v}{\partial x}dx + \cdots + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right\} +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots + \frac{\partial f}{\partial w}\left\{\frac{\partial w}{\partial x}dx + \cdots + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right\}$$

Or, par hypothèse, u, v, ... w sont des fonctions des variables indépendantes x ... y. Donc, d'après ce qu'on a démontré, les divers facteurs entre parenthèses sont respectivement égaux à :

$$du \;, \;\ldots\ldots\; dv \;, \;\ldots\ldots\; dw$$

Donc : $$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \cdots + \frac{\partial f}{\partial w} dw.$$

Maintenant supposons que z ne soit pas une fonction explicite de x et de y ; mais qu'il soit lié à ces variables par une équation telle que $f(x, y, z) = 0$. En y regardant z comme une fonction d'x et d'y, déduite de cette équation même, la fonction $f(x, y, z)$ a une valeur constante, et d'après ce qui vient d'être démontré, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

d'où $$dz = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\, dx - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\, dy$$

Ce résultat fait bien voir pourquoi dans l'exemple que nous avions choisi, les termes s'ajoutaient deux à deux pour donner un terme en dz ; il démontre de plus que cela aura lieu dans tous les cas.

Il peut arriver que l'équation entre les deux variables indépendantes x et y, n'est pas donnée directement, mais dépend de l'élimination d'un certain nombre d'inconnues auxiliaires.

Par exemple, supposons qu'on ait :

$$f(x, y, z, t, u) = 0$$
$$F(x, y, z, t, u) = 0$$
$$\varphi(x, y, z, t, u) = 0$$

Regardons z, t, u comme des fonctions d'x et d'y déduites de ces trois équations ; alors les trois équations elles-mêmes expriment que les fonctions f, F, φ sont des fonctions constantes d'x et d'y. Donc leurs différentielles sont nulles, différentielles qui sont ainsi qu'on l'a vu :

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial u}du = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{dF}{\partial u}du = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial \varphi}{\partial u}du = 0$$

Trois équations du premier degré qui déterminent dz, dt, du en fonction de dx et de dy.

Quand deux fonctions, contenant un nombre quelconque de variables indépendantes, ne diffèrent que par une constante, leurs différentielles sont égales.

Il est clair que nous entendons ici par constante une quantité qui ne varie pas avec les variables actuelles, mais qui peut d'ailleurs dans une autre partie du calcul devenir variable elle-même.

D'après cela, le théorème énoncé est évident. Car la différentielle de la constante est nulle par rapport à chacune des variables actuelles.

Réciproquement, si les différentielles de deux

fonctions sont égales, ces fonctions ne diffèrent que par une constante.

En effet, soit $df = d\varphi$. Je représente par la fonction ψ la différence des fonctions f et φ.

$f - \varphi = \psi$ alors $d(f-\varphi)$ ou $df - d\varphi = d\psi$

donc $d\psi = 0$. c'est-à-dire

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \dots\dots + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0.$$

Cela ayant lieu, quels que soient $dx \dots dy$,

il s'ensuit que $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \dots\dots \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$.

résultats qui indiquent que la fonction ψ est indépendante de $x, \dots, y$. La fonction ψ ne varie donc pas avec les variables actuelles ; donc c'est une constante.

Différentielles des divers ordres.

Nous admettrons d'abord que x représente la variable indépendante : soit une fonction : $y = f(x)$ sa différentielle est :
$$dy = f'(x)\, dx.$$

Considérons la fonction $f'(x)$, formons sa fonction dérivée, que nous désignerons par $f''(x)$. Traitons de même cette dernière, et nous aurons une nouvelle fonction $f'''(x)$. En continuant ainsi, on forme une série de fonctions, qu'on désigne collectivement sous le nom de fonctions dérivées de $f(x)$.

Ces fonctions : $f'(x), f''(x), f'''(x) \dots\dots f^{(n)}(x)$ sont respectivement appelées fonctions premières, ou du premier ordre ; fonction seconde, fonction tierce etc.

On peut facilement démontrer que : $f^{(n+m)}(x)$ est la $n^{ème}$ dérivée de $f^{(m)}(x)$, ou bien la $m^{ème}$ de $f^{(n)}(x)$

Celà posé, on appelle différentielle seconde de $f(x)$, la différentielle de sa différentielle $f(x)dx$. De même la différentielle du 3ème ordre avec la différentielle de la différentielle du second ordre, et ainsi de suite.

En général, quand x est variable indépendante, on suppose que dx est constant ; il est toujours arbitraire, mais il est le même pour toutes les valeurs d'x. D'après celà, la différentielle seconde, que l'on écrit : $d^2f(x)$ est facile à obtenir. On aura :

$$d^2f(x) = d\left\{f'(x)dx\right\} = f'(x)dx.dx = f'(x)dx^2.$$

Mais cette équation $d^2f(x) = f'(x)dx^2$ suppose que dx ne varie pas avec x. Au contraire l'équation $df(x) = f'(x)dx$ a lieu quand même dx suivrait une variation quelconque en fonction d'x.

La différentielle troisième, s'obtiendra en vertu de cette règle générale que la différentielle d'une fonction est égale à la dérivée de cette fonction, multipliée par la différentielle de la variable :

$$d^3f(x) = d\left\{f''(x)dx^2\right\} = f'''(x)dx.dx^2 = f'''(x)dx^3.$$

De même :

$d''f(x) = f^{IV}(x)dx^4$ et ainsi de suite.

Il résulte de ces équations que :

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

$$f'(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

$$f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}.$$

On voit que les dérivées successives de $f(x)$ sont égales aux quotients des différentielles 1ère, 2ème, 3ème etc. de $f(x)$ par les puissances correspondantes de dx. On déduit de là une notation fondée sur l'emploi d'un autre signe ∂. Ainsi pour désigner $f''(x)$ on écrira :

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}.$$

On pourrait à la rigueur se dispenser de mettre l'exposant 2 au dénominateur ; mais on le conserve pour rappeler l'origine de cette notation. On a donc :

$$df = \frac{\partial y}{\partial x}\, dx$$

$$d^2 f = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, dx^2$$

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\, dx^3.$$

$$d^n f = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\, dx^n.$$

Supposons maintenant que x ne soit plus la variable indépendante, mais qu'il soit fonction d'une variable indépendante t : par exemple $x = \varphi(t)$.

Soit toujours $y = f(x)$. On suppose qu'on sait trouver dx, d^2x, d^3x, ... etc.

On demande dy, d^2y, d^3y ......

D'abord, on a toujours, quelle que soit la variable indépendante :

$$(1) \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx.$$

Ensuite :

$$(2) \quad d^2 y = d\left(\frac{\partial y}{\partial x} dx\right) = dx . d\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \frac{\partial y}{\partial x} d . dx$$

$$\text{ou } d^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial y}{\partial x} d^2 x.$$

On aura de même :

$$d^3 y = d\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial y}{\partial x} d^2 x\right\} = dx^2 . d\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} d\,(dx^2)$$

$$+ d^2 x\, d\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \frac{\partial y}{\partial x} d^3 x, \text{ ou}$$

$$(3) \quad d^3 y = dx^3 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial y^2}{\partial x^2} d^2 x\, dx + \frac{\partial y}{\partial x} d^3 x.$$

et ainsi de suite. Il est entendu que dans les formules, on devra remplacer x en fonction de t; par exemple, puisque $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\,dt = \frac{\partial x}{\partial t} dt$ et puisque t est la variable indépendante

$$d^2 x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dt^2, \quad d^3 x = \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} dt^3.$$

On aura donc d'après les formules précédentes les diverses différentielles de y en fonction de t.

Dans les formules (1), (2), (3), etc. il est clair que les seconds membres contiendront après la substitution les facteurs respectifs. dt, dt^2, dt^3, etc.

En sorte qu'on peut remarquer que dans ces mêmes formules l'homogénéité existe pourvu qu'on ait

égard aux indices et aux exposants.

Ces mêmes formules servent à résoudre cet autre problème, savoir : y et x sont deux fonctions de t, liées entre elles par une équation $y=f(x)$; on demande de trouver les dérivées des divers ordres de y par rapport à x.

L'équation (1) donne :
$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{dy}{dx}$$

L'équation (2) donne :
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{d^2y-\frac{\partial y}{\partial x}\,d^2x}{dx^2}$$

d'où
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{d^2y-\frac{dy}{dx}\,d^2x}{dx^2}=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3}.$$

L'équation (3) donne :
$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=\frac{d^3y-3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,d^2x\,dx-\frac{\partial y}{\partial x}\,d^3x}{dx^3}$$
$$=\frac{dx^2\,d^3y-3\,dx\,d^2x\,d^2y+3\,dy\,(d^2x)^2-dx\,dy\,d^3x}{dx^5}$$

Et ainsi de suite.

La solution de ce problème donnée par ces formules est indirecte. On peut la résoudre directement; car, d'après le principe des fonctions de fonctions, appliqué dans ce cas aux dérivées des divers ordres, la dérivée d'une fonction est égale à la différentielle de cette fonction, divisée par la différentielle de la variable. Donc :
$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2}.$$

Et de la même manière :

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{dx^2 d^3y - 3dx\, d^2x\, d^2y + 3dy\,(d^2x)^2 - dx\, dy\, d^3x}{dx^5}$$

Trouver la forme d'une fonction qui est telle que sa différentielle est constante.

Soit x la variable indépendante ; soit $\varphi(x)$ la fonction ; on a :

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)\, dx.$$

Puisque dx est supposé constant, il faut pour que $d\varphi(x)$ le soit, que $\varphi'(x) =$ constante. Donc $\varphi'(x) = a$ alors $d\varphi(x) = a\,dx = d(ax)$.

Ayant des différentielles égales, $\varphi(x)$ et ax ne peuvent différer que par une constante : Donc $\varphi(x) = ax + b$, donc la fonction est du premier degré en x. On arriverait à un résultat analogue si la fonction contenait deux ou plusieurs variables. Ces fonctions $ax+b$ $ax+by+c$, $ax+by+cz+g$, etc. sont souvent désignées sous le nom de fonctions linéaires.

Changement de variable indépendante.

Supposons qu'on ait résolu un certain problème sur une courbe, que nous supposerons plane, par exemple, et dont l'équation est $y = f(x)$. Supposons qu'on soit arrivé à une certaine équation :

$$(1) \quad \rho = F\left(x, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \text{etc.}\right)$$

qui résout la question ; on a pris, par exemple dans tout le cours du calcul, l'abscisse x pour variable indépendante, et on veut savoir à quelle équation on serait arrivé, si on avait pris une autre variable indépendante, et cela sans recommencer les calculs déjà faits. Par exemple, dans un problème de mécanique, l'abscisse et l'ordonnée d'un point sont exprimées en fonction du temps t, et on veut, sans faire de nouveaux calculs, avoir l'équation qui résout la question, en supposant que t est la variable indépendante.

Ce problème est résolu par les formules qui ont été données, savoir :

$$(2) \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{dy}{dx} \\[2mm] \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3} \\[2mm] \dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \dfrac{dx^2 d^3y - 3\,dx\, d^2x\, d^2y + 3\,dy\,(d^2x) - dx\,dy\,d^3x}{dx^5} \end{cases}$$

etc.

En effet, ces formules donnent les valeurs des diverses dérivées de y par rapport à x, en fonction des différentielles des divers ordres de x et de y. Puisqu'on connaît maintenant les valeurs d'x et d'y en fonction de t ; on pourra exprimer ces différentielles en fonction de t ; et si on substitue dans l'équation (1), à la place de x, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ etc. leurs valeurs données par les formules (2), l'équation qui

en résultera sera l'équation cherchée.

Ainsi qu'on vient de le voir, le problème du changement de variable indépendante, a été résolu d'une manière indirecte au moyen de formules, déduites de celles auxquelles avait conduit une autre question.

Soit $y = f(x)$ l'équation proposée ; on veut prendre une autre variable indépendante t dont x et y sont des fonctions. Pour cela il s'agit d'exprimer les dérivées des différents ordres de y par rapport à x en fonction de t. Or, on a toujours quelle que soit la variable indépendante :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{dx}.$$

Pour la dérivée seconde, et les suivantes, on les obtiendra en remarquant, que la dérivée d'une fonction est toujours égale au quotient de la différentielle par la différentielle de sa variable. Cela résulte de la définition même de la différentielle. Donc la dérivée de $\frac{\partial y}{\partial x}$, c'est-à-dire, la dérivée seconde de y par rapport à x, est égale à la différentielle de $\frac{dy}{dx}$, divisée par dx.

Savoir :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

de même : $$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{d\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{dx} = \frac{d\left\{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\right\}}{dx}$$

et ainsi de suite.

Il n'y a plus qu'à développer les calculs indiqués,

Savoir :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{d\left(\frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}\right)}{dx}$$

$$= \frac{dx^2\, d^3y - 3\,dx\, d^2x\, d^2y + 3\,dy\,(d^2x)^2 - dx\, dy\, d^3x}{dx^5}$$

Si l'on veut se débarasser des différentielles, et introduire dans le calcul les dérivées seulement, de x et de y par rapport à t,

savoir $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, ... $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, ...

comme t est la variable indépendante, au lieu de

dx, on mettra $\frac{\partial x}{\partial t}\, dt$,

au lieu de d^2x $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\, dt^2$,

au lieu de d^3x $\frac{\partial^3 x}{\partial t^3}\, dt^3$,

et de même pour dy $\frac{\partial y}{\partial t}\, dt$ et ainsi

de suite. Donc on aura :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}\, dt}{\frac{\partial x}{dt}\, dt} = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial x}{\partial t}dt\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dt^2 - \frac{\partial y}{\partial t}dt\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}dt^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3 dt^3}$$

$$= \frac{\frac{\partial x}{\partial t}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial y}{\partial t}\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3}$$

dt^3 est facteur commun au numérateur et au dénominateur, et cela doit être car toutes les différentielles doivent disparaître puisque le résultat cherché est une relation entre les dérivées.

Quand on a l'équation $y = f(x)$, on peut regarder x comme une fonction d'y; savoir $x = F(y)$, et les fonctions f et F sont dites inverses l'une de l'autre.

Supposons qu'après avoir pris x pour variable indépendante, on veuille prendre y en regardant x comme une fonction F d'y. On aura, comme dans le cas général, à exprimer les différentes dérivées $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ etc en fonction de $dy, d^2y \ldots dx, d^2x$ etc. Or, on peut obtenir ces valeurs en faisant $t = y$ dans les formules du cas général. Alors puisque $dy = \text{const.}$ il est clair que $d^2y = 0$ $d^3y = 0$ etc. Toutes les différentielles d'un ordre supérieur au premier, sont nulles. Les formules se réduisent donc à :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{dy\,d^2x}{dx^3}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{3\,dy\,(d^2x)^2 - dx\,dy\,d^3x}{dx^5}$$

et ainsi de suite.

Si on voulait introduire les dérivées au lieu des différentielles, il faudra remplacer dx par $\frac{\partial x}{\partial y}\,dy$, d^2x par $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\,dy^2$, d^3x par $\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}\,dy^3$ et ainsi de suite. Et on aurait de nouvelles formules, dans le second membre desquelles dy disparaîtra, puisqu'on doit avoir une relation entre des dérivées :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{\frac{\partial x}{\partial y}\,dy} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}}.$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{dy.\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\,dy^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3 dy^3} = -\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{3\,dy\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right)dy^4 - \frac{\partial x}{\partial y}\,dy.\,dy.\,\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}\,dy^3}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^5 dy^5}$$

$$= \frac{3\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right)^2 - \frac{\partial x}{\partial y}\,\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)},$$ Et ainsi de suite.

La première de ces formules, savoir :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}} \text{ ou } \frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 1 \text{ ou } F'(y).f'(x) = 1$$

démontre que le produit des dérivées de deux fonctions inverses est égal à l'unité. Mais, il ne serait pas commode d'être obligé de recourir au cas général, pour retrouver les formules relatives au cas particulier où on prend y pour variable indépendante. Il vaut mieux les trouver directement. Pour cela, on partira des formules générales, que nous avons données : savoir :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{d\left\{\frac{d\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{dx}\right\}}{dx} = \frac{d\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{dx} \text{ etc.}$$

alors en considérant dy comme constant, et en effectuant les opérations indiquées, on aura :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{-dy.\frac{d^2x}{dx^2}}{dx}$$

d'où $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\dfrac{dy\, d^2x}{dx^3}$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{dy\, d^2x.\, 3dx^2 d^2x - dx^3 dy\, d^3x}{dx^7}$$

$$= \frac{3\, dy\, (d^2x)^2 - dx\, dy\, d^3x}{dx^5}.$$

Et ainsi de suite.

Supposons qu'un problème ait conduit à la valeur :

$$\rho = \frac{\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^3 y}{\partial x^2}}.$$

On verra plus tard que cette valeur de ρ est celle du rayon de courbure en un point de la courbe $y=f(x)$, dont les coordonnées sont y et x. On demande à quel résultat on serait arrivé, si au lieu de x, on avait une quantité quelconque t pour variable indépendante. On a pour cela :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{dx} \text{ et}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}.$$

Par conséquent :

$$\rho = \frac{\left\{1+\frac{dy^2}{dx^2}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}} = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}.$$

Si l'on prend y pour variable indépendante, alors $dy = \text{const.}$ $d^2y = 0$, donc :

$$\rho = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\, d^2x}.$$

Si l'on veut introduire les dérivées, il faudra remplacer dx et d^2x par leurs valeurs, savoir :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial y}\,dy\,, \quad d^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\,dy^2.$$

Donc :

$$\rho = -\frac{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 dy^2 + dy^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{dy\,\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\,dy^2} = -\frac{\left\{1 + \frac{\partial x}{\partial y}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}$$

Résultat, qui au signe près, se déduit de la valeur proposée, en y changeant x en y, et y en x.

La puissance $\frac{3}{2}$ emporte d'ailleurs avec elle le signe $\pm$; et si on ne demande que la valeur absolue du rayon de courbure, il faudra prendre pour la puissance $\frac{3}{2}$ un signe tel que le résultat soit positif.

Différentielles des ordres supérieurs pour les fonctions à plusieurs variables.

Soit la fonction à deux variables :

$$f(x,y) = 0.$$

On peut former deux dérivées du premier ordre, l'une par rapport à x, et l'autre par rapport à y, savoir :

$$f'_x(x,y) \quad \text{et} \quad f'_y(x,y).$$

Maintenant chacune de ces dérivées peut être traitée comme la fonction proposée, et donner par conséquent deux dérivées, savoir : la première :

$$f''_x(x,y) \quad \text{et} \quad f''_{x,y}(x,y)$$

et la seconde :

$$f''_{y,x}(x,y) \quad \text{et} \quad f''_y(x,y).$$

Si on continue de même chaque dérivée en donnera deux quand on passera à l'opération suivante. Mais toutes ces dérivées ne sont pas distinctes, et en général, deux dérivées qui ont été prises un même nombre de fois par rapport à x, et par rapport à y, sont égales entre elles, quelque soit d'ailleurs l'ordre dans lequel les opérations ont été faites. Par exemple

$$f''_{x,y}(x,y) = f''_{y,x}(x,y)$$

Vérifions-le sur la fonction $Ax^m y^n$. A, m, n étant des quantités constantes : On a :

$$f'_x(x,y) = mAx^{m-1}y^n, \quad f'_y(x,y) = nAx^m y^{n-1}$$

$$f''_{x,y}(x,y) = mnAx^{m-1}y^{n-1}, \quad f''_{y,x}(x,y) = mnAx^{m-1}y^{n-1}.$$

La même chose aura lieu pour une série de termes de la forme $Ax^m y^n$, car l'égalité existant pour les termes deux à deux, aura lieu pour les deux dérivées. Ainsi, il est démontré que pour un polynome quelconque, la seconde dérivée reste la même, quelque soit l'ordre dans lequel se fasse les dérivations par rapport à chacune des variables. Car il est clair que ce qu'on a dit pour un terme contenant deux variables, pourra se dire sur un terme contenant un nombre quelconque de variables.

Admettons, (et le théorème sera démontré plus tard dans toute sa généralité) que $f''_{x,y} = f''_{y,x}$, quelle que soit la fonction f. Je dis qu'on peut intervertir d'une manière quelconque l'ordre des dérivations, sans

hanger la dérivée, pourvu qu'on la prenne un même nombre de fois par rapport à x, un même nombre de fois par rapport à y etc.

Considérons une fonction contenant un nombre quelconque de variables, par exemple, trois, pour fixer les idées. $f(x,y,z)$.

La dérivée de l'ordre $m+n+p$ reste la même si on prend la dérivée m fois par rapport à x, n fois par rapport à y, p fois par rapport à z, quelque soit d'ailleurs l'ordre de ces dérivations.

Pour le démontrer, je dis d'abord qu'on peut changer l'ordre de deux dérivations successives. En effet, Supposons qu'après avoir opéré dans un ordre indiqué par la série :

$$x, y, z, \overline{z, y}, \ldots\ldots x, z$$

on opère dans un ordre indiqué par la série :

$$x, y, z, \underline{y, z}, \ldots\ldots x, z.$$

L'ordre de la 4ème et de la cinquième dérivation sont seuls intervertis. Il est clair que, tant que les dérivations sont relatives aux mêmes variables, les résultats sont les mêmes

Maintenant, d'après ce que nous admettons, les résultats sont les mêmes après la cinquième dérivation, et à partir de là, les dérivations sont relatives aux mêmes variables. Donc les résultats définitifs sont les mêmes.

En second lieu, on peut amener une dérivation quelconque à un rang donné, sans changer la valeur de la dérivée.

En effet, on pourra la permuter avec celle qui la

suit ou la précède immédiatement, et cela jusqu'à ce qu'elle soit venue au rang assigné.

Donc en général, l'ordre dans lequel s'effectuent les dérivations n'influent pas sur les résultats.

On déduit de là une notation fondée sur l'emploi de la lettre ∂. Supposons en effet qu'il s'agisse de représenter une dérivée de l'ordre, $m+n+p=\mu$, les dérivées étant prises m fois par rapport à x, n fois par rapport à y, et p à z, on écrira :

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p},$$

notations qui indique d'une part l'ordre μ de la dérivée, et d'autre part combien il y a de dérivées relatives à chacune des variables.

Considérons d'abord le cas de deux variables, x, y. Et supposons que dx et dy soient des constantes, soit parceque x et y sont les variables indépendantes, soit parceque ce sont des fonctions linéaires de ces variables indépendantes.

Soit $f(x)=0$, on a d'abord :

$$(1)\quad df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont des fonctions d'x et d'y ; et d'ailleurs il n'y a pas d'autres variables que x et y. Donc :

$$d^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

La première contient la différentielle $\frac{\partial f}{\partial x}dx$, et la seconde la différentielle de $\frac{\partial f}{\partial y}dy$, prises toutes deux

d'après l'équation (1) qui est générale. En réduisant on a :

$$(2)\ d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

On aura de même $\partial^3 f$, savoir :

$$d^3f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy +$$

$$+2\frac{\partial^3 f}{\partial x^3 dy}dx^2dy + 2\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2$$

$$+\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

Ou en réduisant :

$$(3)\ \partial^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

On aura d^4f, toujours d'après les mêmes raisonnements :

$$d^4f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}dx^4 + \frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}dx^3dy.$$

$$+3\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}dx^3dy + 3\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}dx^2dy^2$$

$$+3\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}dx^2dy^2 + 3\frac{\partial^4 f}{\partial x\,\partial y^3}dx\,dy^3$$

$$+\frac{\partial^4 f}{\partial x\,\partial y^3}dx\,dy^3 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}dy^4.$$

$$(4)\ d^4f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}dx^4 + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}dx^3dy + 6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}dx^2dy^2 + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x\,\partial y^3} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}dy^4.$$

En considérant les résultats (1), (2), (3), (4) etc. On peut remarquer que si on remplace les indices de ∂f par des exposants, on aura respectivement les

les puissances 1, 2, 3, 4 etc, la quantité $\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ et à priori, on pourrait prévoir que cela aurait lieu. Car le carré par exemple, de cette quantité est :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)$$

La multiplication par $\frac{\partial f}{\partial x}dx$ ajoute une unité à l'exposant de ∂f, et un à celui de dx, tandis que celle par $\frac{\partial f}{\partial y}dy$ augmente d'une unité les exposants de ∂f et de dy. La différentiation par rapport à x augmente d'ailleurs, d'une unité l'indice de ∂f et d'une unité l'exposant de dx. Et de même, pour les autres puissances. Donc on peut écrire symboliquement :

$$d^n f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^n$$

pourvu qu'il soit bien entendu qu'après avoir développé la $n^{ème}$ puissance, au lieu de $(\partial f)^n$, on mettra $\partial^n f$, c'est-à-dire qu'on change les exposants de ∂f en indices de dérivations.

Soit $f(x,y,z)=0$ une fonction à trois variables ; nous supposerons d'abord que dx, dy, dz soient des constantes. On a d'abord :

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Ensuite, puisque x, y, z sont les seules variables :

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dx\,dz$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dy\,dz$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}dz\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}dz\,dx$$

Donc :

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z}dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dy\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}dz\,dx.$$

Et comme les raisonnements qui ont été faits au sujet des puissances de la quantité :

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

subsistent, quelque soit le nombre des variables, on peut écrire symboliquement :

$$d^3f = \left(\frac{\partial t}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^3,$$

et ainsi des autres dérivées.

Revenons au cas de deux variables, et supposons maintenant que x et y ne soient plus variables indépendantes, ou plus généralement que les différentielles dx et dy ne soient plus constantes. On a toujours :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Puis :

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y.$$

Les deux derniers termes proviennent de la variabilité

de dx et de dy.

De même :

$$d^3f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2$$

$$+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx\,d^2x$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(dx\,d^2y + dy\,d^2x\right) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\,d^2y$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}d^2x\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}d^2x\,dy + \frac{\partial f}{\partial x}d^3x$$

$$+\frac{\partial f}{\partial y}d^3y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}d^2y\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,d^2y,$$

ou en réduisant :

$$d^3f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^3 + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx\,d^2x + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\,d^2y$$

$$+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(dx\,d^2y + dy\,d^2x\right) + \frac{\partial f}{\partial x}d^3x + \frac{\partial f}{\partial y}d^3y.$$

En se servant de la notation symbolique dont nous avons parlé.

Ces formules sont très-compliquées, et il vaudra mieux, quand on voudra les employer, les chercher dans chaque cas particulier.

La même remarque s'applique à fortiori aux fonctions qui contiennent trois ou plusieurs variables qui ne sont pas indépendantes.

Différentielles des ordres supérieurs pour les fonctions implicites.

Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une seule va-

-riable indépendante x et qu'une quantité y soit lié avec x par l'équation $f(x,y)=0$.

La différentielle du premier ordre est nulle et on a:

$$(1)\ \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dx=0.$$

Cette quantité étant nulle, sa différentielle est nulle, et puisque $dx=\text{const}$, et par suite $d^2x=0$, on a:

$$(2)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=0.$$

Équation qui donne d^2y en fonction de dy, supposé connue au moyen de l'équation (1). De même, d^2y étant connu au moyen de l'équation (2), on différentiera de nouveau et on aura une équation donnant d^3y au moyen de d^2y et de dy, et ainsi de suite.

Mais on peut opérer autrement. En effet, on tire d'abord de l'équation (1):

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=F(x,y).$$

Traitons la fonction F de la même manière, et nous aurons la dérivée seconde:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{dF}{dx}=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy}{dx}$$

d'où $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot F(x,y)$

désignons cette dérivée par $\varphi(x,y)$, et de même

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=\frac{d\varphi}{dx}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy}{dx}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi(x,y)=\psi(x,y).$$

En continuant ainsi toujours, suivant la même loi de formation, on formera toutes les dérivées de y par rapport à x.

Quand on a une quantité y liée avec la variable indépendante x par l'équation implicite $f(x,y)=0$. On obtient, ainsi qu'on vient de le voir, toutes les différentielles d'y, à l'aide de deux méthodes. Elles sont toutes deux fondées sur le même principe ; mais par la seconde, on arrive aux équations résolues, tandis que la première ne fait que les donner sans les résoudre.

Dans les autres cas que nous allons examiner cette double méthode se présentera d'elle-même.

Supposons, par exemple que x étant la variable indépendante, et $y, z \dots w$ étant des fonctions de cette variable en nombre quelconque, on demande les dérivées de ces fonctions

$f(x, y, z \dots w)=0$, ou bien les différentielles

.... dy, d^2y etc... dw, d^2w et

$F(x,y,z \dots w)=0$. Car ces deux problèmes reviennent au même. Néanmoins il est toujours plus commode en général de passer par l'équation différentielle.

On aura donc en différentiant une première fois :

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\dots+\frac{\partial f}{\partial w}dw=0$$

....

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \cdots + \frac{\partial F}{\partial w}dw = 0.$$

Comme il est sous-entendu que les fonctions $f \ldots F$ sont en nombre égal à celui des quantités $y, z, \ldots w$, on aura ainsi un nombre d'équations du premier degré, égal à celui des inconnues, et on pourra déterminer les différentielles et aussi les dérivées du premier ordre.

Pour avoir celles du second ordre, on différentiera ces dernières équations, d'après le même principe que tout-à-l'heure, mais en se rappelant que $dx = \text{const}$. Et de même pour les différentielles suivantes. On remarquera que si $dy, dz, \ldots dw$ ont pu être déterminées, c'est-à-dire si leurs coefficients respectifs $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots \frac{\partial f}{\partial w}$, ne sont pas nuls, les différentielles des ordres supérieurs ayant toujours les mêmes coefficients, n'auront pas non plus des valeurs infinies. Et il est facile de voir que $\frac{\partial f}{\partial y}$, par exemple, est toujours le coefficient de $dy, d^2y, d^3y, \ldots d^ny$.

En effet, dans les différentiations successives qu'on effectue, le terme $\frac{\partial f}{\partial y}dy$ donne $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y$; ce dernier terme dans l'opération suivante donnera :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}d^2y\,dy + \frac{\partial f}{\partial y}d^3y$$ et ainsi de suite.

Ayant déterminé les dérivées du premier ordre $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots \frac{\partial w}{\partial x}$, on les considérera comme des fonctions des quantités $x, y, z, \ldots w$,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f_1(x, y, z, \ldots w), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = F_1(x, y, \ldots w), \text{ etc.}$$

Et si l'on ne veut obtenir les différentielles d'ordre supérieur que pour une quantité y, par exemple, on aura :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d\frac{\partial y}{\partial x}}{dx} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial w}dw}{dx}$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dx}.$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z} F_1 + \text{etc.}$$

d'où l'on déduira si l'on veut la différentielle seconde d^2y, et le calcul se continue de la même manière.

Soit l'équation $f(x, y, \alpha) = 0$ dans laquelle x est la variable indépendante, y une fonction implicite de cette variable, et α un paramètre variable. Cette équation représente une infinité de courbes planes ; car à chaque valeur particulière attribuée à α, correspond une courbe particulière. On demande une relation qui exprime la propriété qui est commune à ces courbes, et qui est relative à la direction de leurs tangentes.

Pour cela considérons une de ces courbes en particulier ; alors α a une valeur constante et déterminée, par exemple, par la condition que la courbe passe par

un point donné dont les coordonnées sont x et y. Cela est possible en général.

Différentions l'équation comme si nous voulions obtenir $\frac{\partial y}{\partial x}$ ou $\frac{dy}{dx}$, nous aurons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \qquad \text{d'où} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Entre cette équation qui détermine la direction de la tangente à la courbe considérée, au point (x, y), et l'équation $f(x, y, \alpha) = 0$, éliminons le paramètre α. Nous aurons une équation <u>différentielle</u> : (1) $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, dans laquelle le paramètre α, qui particularise la courbe que nous avons considérée, a disparu et qui exprime par conséquent une propriété commune à toutes les courbes représentées par l'équation générale $f(x, y, \alpha) = 0$. De l'équation différentielle (1) on déduira $\frac{dy}{dx} = \psi(x, y)$. En sorte que si l'on connaît l'équation (1), on pourra sans connaître l'équation de la courbe, tracer la tangente à celle de ces courbes qui passe par un point (x, y).

Si l'équation contenait deux paramètres a, b, $f(x, y, a, b) = 0$. Comme à chaque valeur de a, on peut joindre une valeur quelconque de b, cette équation représente une infinité de familles de courbes. On demande d'éliminer a et b de l'équation ; le résultat de l'élimination exprime une propriété commune à toutes ces courbes ; mais pour le moment, proposons nous ce problème comme une question analy-

-tique seulement.

On aura comme dans le cas précédent :

(1) $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = 0$, et en différentiant cette équation, on en aura une autre :

(2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$

Ces équations (1) et (2) jointes à l'équation générale : $f(x, y, a, b) = 0$ serviront à éliminer a et b.

Si l'on avait un plus grand nombre de paramètres, on prendrait un nombre d'équations différentielles égal au nombre de ces paramètres à éliminer, et on arriverait au résultat cherché. On pourrait aussi prendre d'abord l'équation aux différentielles premières, et éliminer le premier paramètre a entre cette équation et l'équation $f(x, y, a, b) = 0$.

On aurait ainsi une nouvelle équation $F(x, y, b) = 0$: on formera l'équation aux différentielles premières, et on éliminera b entre cette équation et l'équation $F(x, y, b) = 0$.

L'équation générale des cercles est :

$$(x-b)^2 + (y-c)^2 = a^2$$

b et c sont les coordonnées du centre, a le rayon. Proposons nous d'éliminer a.

Pour cela formons l'équation aux différentielles premières :

$$x - b + (y-c)\frac{dy}{dx} = 0.$$

L'élimination de a se trouve toute faite, et il en

sera ainsi toutes les fois que l'équation proposée sera résolue par rapport à une fonction quelconque de a seulement; car a étant supposé constant, la différentielle de cette fonction de a est nulle. Donc pour le cercle qui passe par le point (x, y) la tangente en ce point est déterminée par l'équation

$$x - b + (y - c)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Supposons maintenant que a et c restent les mêmes, et que b varie; alors l'équation : $(x-b)^2 + (y-c)^2 = a^2$ représente une série de cercles de même rayon, et dont les centres se trouvent sur une même parallèle à l'axe des y. On aura toujours :

$$x - b + (y - c)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{d'où}$$

$$x - b = -(y - c)\frac{dy}{dx}.$$ En substituant on aura : $(y-c)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-c)^2 = a^2$ qui est l'équation cherchée.

On peut aussi éliminer successivement chacune des trois quantités a, b, c. Savoir :

Pour a $\quad (1)\ x - b + (y - c)\frac{dy}{dx} = 0$

Pour b $\quad (2)\ (y-c)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-c)^2 = a^2$

Pour c $\quad (3)\ (x-b)^2 + \frac{(x-b)^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a^2$

Maintenant pour en éliminer deux à la fois, nous

nous servirons des notations suivantes:

$\frac{dy}{dx}=p$ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ou $\frac{\partial p}{\partial x}=q$, et

$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ ou $\frac{\partial q}{\partial x}=r$, alors les équations (1), (2), (3) deviennent

(4) $x-b+(y-c)\,p=0$

(5) $(y-c)^2\,(1+p^2)=a^2$

(6) $(x-b)^2\,(1+p^2)=a^2p^2$

Si on veut éliminer a et b, on prendra l'équation générale des cercles, l'équation (4) et la différentielle première de l'équation (5) qui est :

$$1+(y-c)\frac{\partial p}{\partial x}+p\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=0$$

ou bien: $\quad 1+(y-c)\,q+p^2=0 \qquad (7).$

L'élimination se trouve toute faite, parce que l'équation (5) étant résolue, ou pourrait se résoudre par rapport à b.

Ceci fait voir encore qu'en différentiant l'équation (7), on fera disparaître c, et les trois quantités a, b, c, auront été éliminées. On tire de (7), $c=y+\frac{1+p^2}{q}$. En différentiant, il vient :

$0=dy+\frac{2pq\,dp-(1+p^2)\,dq}{q^2}$ ou bien

$p\,dx+\frac{2pq^2dx-(1+p^2)\,r\,dx}{q^2}=0.$

Divisant tout par dx, on aura :

$$p + 2p - \frac{(1+p^2)r}{q^2} = 0$$

ou $3pq^2 - (1+p^2)r = 0.$

On pourrait aussi commencer par b, et c, puis éliminer a; on devrait arriver au même résultat.

Considérons une fonction implicite z de deux variables indépendantes x et y. Pour obtenir ses différentielles des ordres supérieurs, on aura encore deux méthodes.

Soit $f(x, y, z) = 0$. On aura en différentiant une équation qui donne dz; puis en différentiant de nouveau, on en aura une autre qui donnera d^2z, et ainsi de suite. Par exemple, si on avait :

$$\sin.x + x^2 - zy - \sin.z = 0$$

on aurait pour déterminer dz, l'équation :

$$\cos.x dx + 2x dx - z dy - (y + \cos.z)\, dz = 0.$$

Ensuite en différentiant une seconde fois, comme dx et dy sont constants

$$(-\sin.x + 2)\, dx^2 - dz dy + \sin.z\, dz^2 - (y + \cos.z)\, d^2z = 0$$

Si on avait deux fonctions z et v, et deux équations f et F, on différentierait une première fois, ce qui donnerait deux équations déterminant dz et dv. Puis en différentiant de nouveau, on aurait d^2z et d^2v.

On pourrait encore de la première équation différentielle tirer la valeur de dz qui sera de la forme :

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

p et q étant des fonctions d'x, y, z

$$d^2z = dp\,dx + dq\,dy.$$

mais $dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$

et dz étant connu, en fonction d'x et d'y, on aura :

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z}p\right)dx + \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}q\right)dy.$$

On aura de même :

$$dq = \left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}p\right)dx + \left(\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial z}q\right)dy$$

Et alors on aura :

$$d^2z = \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z}p\right)dx^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}q\right)dx\,dy$$

$$+\left(\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial z}q\right)dy^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}p\right)dx\,dy.$$

ou en réduisant :

$$d^2z = \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z}p\right)dx^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial z}q\right)dy^2$$

$$+\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} + q.\ \frac{\partial p}{\partial z} + p\ \frac{\partial q}{\partial z}\right)dx\,dy.$$

De même pour avoir d^3z.

On a vu que les dérivées des différents ordres servent à éliminer un ou plusieurs paramètres d'une équation à une seule variable. Elles servent aussi à éliminer les fonctions arbitraires, c'est-à-dire à trouver une relation qui existe entre toutes les fonctions d'une même quantité, indépendamment de la forme de ces fonctions. Supposons, par exemple qu'on ait l'équation : $z = \varphi(x^2 + y^2)$, il s'agit de trouver entre z et ses dérivées dz, d^2z etc. une relation indépendante de la forme φ de la fonction, et qui appar-

-tiendra par conséquent aux fonctions

$$x^2+y^2,\ \sin.(x^2+y^2),\ \log.(x^2+y^2)\ \text{etc.}$$

En effet, soit $u = x^2+y^2$
On aura : $z=\varphi(u)$. Par suite :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$$

et $$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}$$

or $$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y.$$

Donc : $$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(u).\,2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(u)\ 2y.$$

En éliminant $\varphi'(u)$ on a :

(1) $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. Équation qu'on désigne sous le nom d'équation aux différentielles partielles, et qui convient à toutes les surfaces qu'on obtient en donnant à φ toutes les formes possibles. Toutes ces surfaces jouissent de la propriété indiquée par l'équation (1), savoir que la normale au point (x, y, z) va toujours couper l'axe des z.

Généralement soit u une fonction donnée de deux variables indépendantes, x et y. On demande d'éliminer la fonction φ dans l'équation $z=\varphi(u)$.

Cette équation représente une infinité de surfaces et on veut avoir l'équation aux dérivées partielles

qui exprime une propriété commune à ces surfaces.

Or on a :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Éliminons $\varphi'(u)$ entre ces équations, et nous aurons :

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Supposons maintenant qu'on ait deux quantités u et v, qui sont des fonctions données d'x, d'y et de z :

$$u = f(x,y,z) \qquad v = F(x,y,z)$$

z étant lui-même fonction implicite d'x et d'y déterminée par l'équation : $v = \varphi(u)$.

On veut éliminer la fonction φ. Pour cela je prends les dérivées premières ; savoir :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

J'élimine $\varphi'(u)$, et j'ai pour résultat cherché :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Soit $w = \varphi(u,v)$, u, v, w étant des fonctions données des trois variables indépendantes x, y, z et d'une fonction θ de ces variables. Proposons-nous d'éliminer la fonction arbitraire φ. Pour cela, je différentie l'équation $w = \varphi(u,v)$ ou plutôt je prends ses dérivées partielles, successivement par

rapport à x, à y, et à z.

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial z}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)$$

Si entre ces trois équations on élimine $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ et si on représente respectivement $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ par p, q, r, on arrivera à une fonction linéaire de p, q, r de la forme :

$$Pp+Qq+Rr=S.$$

P, Q, R, S étant des fonctions d'x, y, z, et θ. et réciproquement. Quand on cherchera quelle est la fonction qui a pour différentielle cette fonction linéaire, c'est-à-dire, quand on intégrera la fonction $Pp+Qq+Rr=S$, on trouvera la fonction φ.

Enfin, on peut avoir dans le cas de deux variables indépendantes x et y, une équation de la forme (1) $F\left[x, y, z, \varphi(u)\right]=0$ z étant fonction d'x et d'y, et u, fonction d'x, y, z, et dans le cas de trois variables indépendantes, x, y, z,
(2) $F\left\{x, y, z, \theta, \varphi(u, v)\right\}=0$. θ étant fonction de ces variables, et, u, v fonction d'x, y, z, θ.

L'élimination de la fonction φ se fera encore dans ces cas, au moyen des dérivées partielles. Je prends

l'équation (1) par exemple et je représente $\varphi(u)$ par v. $v = \varphi(u)$, alors l'équation (1) devient $F(x, y, z, v) = 0$. Je différentie, ou plutôt je prends la dérivée par rapport à x, puis par rapport à y, en regardant z et v comme des fonctions d'x et d'y. J'obtiens ainsi deux équations qui contiennent $\varphi(u)$ ou v et $\varphi'(u)$.

En y joignant l'équation (1), on aura trois équations entre lesquelles on éliminera les deux fonctions arbitraires $\varphi(u)$ et $\varphi'(u)$.

Le développement du calcul est celui-ci, par rapport à x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Ces deux équations jointes à l'équation (1) serviront à éliminer v et $\varphi'(u)$, et l'équation résultante sera l'équation demandée.

Théorème des fonctions homogènes.

Une fonction d'un nombre quelconque de variables est dite homogène quand en multipliant par t toutes ses variables, on ne fait que multiplier la fonction par une certaine puissance de t. Le nombre qui marque cette puissance est appelé le degré de la fonction. Le nombre peut d'ailleurs être entier ou non entier, positif ou négatif.

La somme des produits des dérivées d'une fonction homogène par la variable correspondante est égale à

fonction multipliée par le nombre qui marque son degré.

Prenons le cas de deux variables, soit $\theta=\varphi(x,y)$. Je dis d'abord qu'on peut mettre cette fonction sous la forme $\theta=x^m\psi\left(\frac{y}{x}\right)$. En effet, par hypothèse, on a, en appelant m le degré de la fonction :

$$\varphi(tx,ty)=t^m\varphi(x,y).$$

Celà a lieu quelque soit t. Faisons $t=\frac{1}{x}$ on aura

$$\varphi\left(1+\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^m}\ \varphi(x,y).$$

Or, $\varphi\left(1+\frac{y}{x}\right)$ est une certaine fonction d'$\frac{y}{x}$, que nous désignerons par ψ. On aura :

$$\varphi(x\ y)=x^m\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Celà posé, prenons la dérivée de θ par rapport à x ; puisque (1) $\theta=x^m\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, on a

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=mx^{m-1}\psi\left(\frac{y}{x}\right)+x^m\psi'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

donc.

$$(2).\ \frac{\partial\theta}{\partial x}=mx^{m-1}\psi\left(\frac{y}{x}\right)-y\,x^{m-2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ensuite la dérivée par rapport à y.

$$(3)\quad \frac{\partial\theta}{\partial y}=x^m\psi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}=x^{m-1}\psi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Si donc entre les trois équations (1), (2), (3) on élimine les deux fonctions ψ et ψ', on arrivera à un résultat qui conviendra à toute fonction homogène. Par là, on voit à priori, qu'il existe un certain théorème relatif aux fonctions homogènes ; l'élimination en donne l'énoncé.

Je multiplie l'équation (2) par x et l'équation (3) par y et j'ajoute :

$$x\frac{\partial\theta}{\partial x}+y\frac{\partial\theta}{\partial y}=mx^{m-1}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Et à cause de l'équation (1)

$$x\frac{\partial\theta}{\partial x}+y\frac{\partial\theta}{\partial y}=m\theta.$$

De même pour trois, ou un plus grand nombre de variables.

Le théorème vient d'être démontré en considérant la question comme une question d'élimination de fonctions arbitraires. Mais on peut en donner une autre démonstration plus directe et plus simple.

Soit en effet une fonction de trois variables x, y, z. savoir $\varphi(x,y,z)$.

Supposons-la homogène du degré m, alors

$$\varphi(tx,ty,tz)=t^m\varphi(x,y,z)$$

Posons $tx=u$, $ty=v$, $tz=w$

alors on a $\varphi(u,v,w)=t^m\varphi(x,y,z)$

Différentions par rapport à t. Comme on a :

$$du=xdt,\ dv=ydt,\ dw=zdt,$$

l'équation différentielle sera

$$\varphi'_u(u,v,w)xdt+\varphi'_v(u,v,w)ydt+\varphi'_w(u,v,w)zdt=mt^{m-1}\varphi(x,y,z)dt.$$

ou bien

$$x\varphi'_u(u,v,w)+y\varphi'_v(u,v,w)+z\varphi'_w(u,v,w)=mt^{m-1}\varphi(x,y,z).$$

Cela a lieu quelque soit t.

Faisons $t=1$. alors :

$$u=x,\ v=y,\ w=z$$

et on a :

$$x\varphi'_x(u,v,w)+y\,\varphi'_y(u,v,w)+z\,\varphi'_z(u,v,w)=m\varphi(x,y,z)$$

ou $x\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+y\dfrac{\partial\theta}{\partial y}+z\dfrac{\partial\theta}{\partial z}=m\,\theta.$

La réciproque de ce théorème sera démontrée plus tard.

La dérivée d'une fonction homogène est elle-même homogène, et son degré est inférieur d'une unité à celui de la fonction.

Soit une fonction $\theta=\varphi(x,y,z)$ on peut la mettre sous la forme

$$\theta=x^m\psi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right).$$

La dérivée par rapport à y par exemple est :

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=x^m\psi'_{\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)\frac{1}{x}=x^{m-1}\psi'_{\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right).$$

Si on change alors x en tx, y en ty, z en tz, on voit que $\dfrac{\partial\theta}{\partial y}$ est multiplié par t^{m-1}. Donc c'est une fonction homogène et du degré $n-1$.

De même pour $\dfrac{\partial\theta}{\partial z}$; quant à $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$, il sera plus commode pour faire la démonstration de mettre θ sous la forme :

$$\theta=y^m\psi_1\left(\frac{x}{y},\frac{z}{y}\right).$$

Au reste la démonstration générale, puisqu'elle est faite pour une variable quelconque y.

Il résulte de là que le théorème des fonctions homogènes donne une infinité d'équations. Car toutes les dérivées d'une fonction homogène sont homogènes,

et à chacune d'elles on peut appliquer le théorème.

1°. On demande quelle est la fonction continue φ pour laquelle on a :

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

Soit $x+y = u$. Alors

$$\varphi(u) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Prenons la dérivée par rapport à x.

$$\varphi'(u)\frac{du}{dx} = \varphi'(x). \text{ or } \frac{du}{dx} = 1$$

Donc $\varphi'(u) = \varphi'(x)$. On démontrera de même que $\varphi'(u) = \varphi'(y)$.

Donc $\varphi'(x) = \varphi'(y)$. $\varphi'(x)$ est donc une fonction qui ne change pas quand on change x en une quantité y, qui est d'ailleurs quelconque. Donc $\varphi'(x) = \text{const}$.
Donc $\varphi'(x)dx$ ou $d\varphi(x) = adx = dax$. Donc $\varphi(x)$ ne peut différer de ax que par une constante. Donc $\varphi(x) = ax + c$.

C'est là la seule forme de $\varphi(x)$ qui puisse satisfaire à la question. Mais il n'est pas certain qu'elle y satisfasse. Cherchons donc quelle valeur il faut donner à C pour qu'elle y satisfasse. Substituons dans l'équation du problème :

$$a(x+y) + C = ax + c + ay + c.$$ Il reste $C = 2C$, donc $C = 0$.

2°. Quelles sont les fonctions pour lesquelles :

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Les logarithmes jouissent de cette propriété et je dis qu'ils en jouissent seuls. En effet soit $u = xy$.
Alors $\varphi(u) = \varphi(x) + \varphi(y)$

$$\varphi'(u)\frac{du}{dx} = \varphi'(x) \;.\; \text{Or } \frac{du}{dx} = y.$$

Donc $y\,\varphi'(u) = \varphi'(x)$.

Demême $x\,\varphi'(u) = \varphi'(y)$.

Si l'on multiplie ces deux équations en croix, on a

$$x\,\varphi'(x) = y\,\varphi'(y).$$

On conclut comme précédemment que $x\,\varphi'(x) = \text{const.} = A$.

Donc $\varphi'(x) = \dfrac{A}{x}$.

Donc $\varphi'(x)dx$ ou $d\varphi(x) = \dfrac{A\,dx}{x} = d\,A\log. x$

Donc $\varphi(x) = A\log. x + C$.

Or $A\log. x$ c'est le logarithme d'x pris dans un certain système : Donc

$$\varphi(x) = Lx + C$$

Essayons si cette valeur convient ; c'est la seule qui puisse être bonne. Cherchons la valeur que C doit avoir.

$L(xy) + C = Lx + C + Ly + C$. Donc $C = 0$.

3°. Soit encore $\varphi(x+y) = \varphi(x)\,\varphi(y)$

Posons $x + y = u$. alors $\varphi(u) = \varphi(x)\,\varphi(y)$.

$$\varphi'(u)\frac{du}{dx} = \varphi'(x)\,\varphi(y) \;.\; \text{or } \frac{du}{dx} = 1.$$

Donc $\varphi'(u) = \varphi'(x)\,\varphi(y)$

Demême $\varphi'(u) = \varphi(x)\,\varphi'(y)$

Donc $\varphi'(x)\,\varphi(y) = \varphi(x)\,\varphi'(y)$:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \text{constante} = \alpha$$

Donc $\frac{dx\,\varphi'(x)}{\varphi(x)} = a\,dx = d(ax)$.

Les différentielles étant égales les fonctions ne peuvent différer que par une constante.

$\text{Log.}\,\varphi(x) = ax + C$. Par suite

$$\varphi(x) = e^{ax+c} = e^c (e^a)^x$$

soit $e^c = A$ et $e^a = B$.

alors $\varphi(x) = AB^x$.

voyons si cette solution convient.

$$A.B^{x+y} = AB^x.\,AB^y = A^2 B^{x+y}.$$

Donc $A^2 = A$. La solution $A = 0$ doit être rejetée.

Donc $A = 1$ et $\varphi(x) = B^x$.

Cette question pourrait être ramenée à la première.

Car soit:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\ \varphi(y)$$

Prenons les logarithmes des deux membres

$$\log.\,\varphi(x+y) = \log.\,\varphi(x) + \log.\,\varphi(y).$$

Alors si l'on pose $\log.\,\varphi(x) = \psi(x)$, on voit clairement que ce problème est résolu par le premier.

Donc $\psi(x) = \alpha x$. ou bien $\log.\,\varphi(x) = \alpha x$. Par suite,

$$\varphi(x) = e^{ax} = (e)^x = B^x$$

4°. Soit $\varphi(x,y) = \varphi(x)\ \varphi(y)$. On peut de même ramener cette équation à la seconde:

Car $\log.\,\varphi(xy) = \log.\,\varphi(x) + \log.\,\varphi(y)$

ou $\psi(xy) = \psi(x) + \psi(y)$

Mais on peut la traiter directement.

Soit $u = xy$. alors $\varphi(u) = \varphi(x)\,\varphi(y)$

$$\varphi'(u)\frac{du}{dx} = \varphi'(x)\,\varphi(y).\ \text{or}\ \frac{du}{dx} = y.$$

Donc $y\,\varphi'(u) = \varphi'(x)\,\varphi(y)$

Demême $x\varphi'(u) = \varphi(x)\,\varphi'(y)$

Si on les multiplie en croix, on a

$$y\,\varphi(x)\,\varphi'(y) = x\varphi'(x)\,\varphi(y).$$

Donc $\dfrac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{y\,\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \text{constante} = a$

d'où $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{a}{x}$. Donc

$$\frac{dx\,\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{a\,dx}{x}\ \text{ou bien}$$

$d\log.\varphi(x) = a\,d\log.x = d\,(a\log.x)$

Or $a\log.x = \log.x^a$. Donc

$\log.\varphi(x) = \log.x^a + C$. soit $C = \log.B$.

alors $\log.\varphi(x) = \log.x^a + \log.B = \log.(Bx^a)$

Donc $\varphi(x) = Bx^a$. vérifions :

$$B\,(xy)^a = Bx^a.\,By^a = B^2\,(xy)^a.$$

Donc $B^2 = B$ $\quad B = 0$ solution à rejeter.

$B = 1$ Donc $\varphi(x) = x^a$.

Si on prend la dérivée de $\varphi(x+y)$ par rapport à x ou par rapport à y, on obtient le même résultat,

car soit $u = x+y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = 1. \text{ Donc}$$

$$\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Mais si l'on avait $\varphi(ax+by)$ les deux dérivées ne seraient plus égales, mais dans le rapport $\frac{a}{b}$.

Soit $u = \varphi(x+at) + \psi(x-at)$.

La dérivée première par rapport à t est

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi'(x+at)a = \psi'(x-at)a.$$

La dérivée seconde est:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi''(x+at)a^2 + \psi''(x-at)a^2.$$

Or, prenons maintenant les dérivées par rapport à x.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi'(x+at) + \psi'(x-at)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x+at) + \psi''(x-at)$$

Donc $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Développement des fonctions en séries.

Quand on a un polynome, tel que

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Gx + H.$$

et qu'on y remplace x en $x+h$, on peut écrire le développement de $f(x+h)$; car m étant supposé entier et positif, la formule du binôme de Newton conduit à:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}.f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\text{etc}+\frac{h^n}{1.2..n}f^n(x)+\text{etc.}\frac{h^m}{1.2..m}f^m(x)$$

Le second membre contient un nombre limité de termes, savoir $m+1$; car m étant entier et positif, et le degré des dérivées diminuant d'une unité à mesure que l'indice de dérivation augmente lui-même d'une unité, on arrivera à une fonction du premier degré, puis à une constante dont la dérivée est nulle.

Mais si au lieu de considérer un polynome algébrique, nous considérons une fonction quelconque d'x, et si nous changeons x en $x+h$, nous pourrons nous proposer de comparer $f(x+h)$ avec la quantité :

$$(1)\ f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\dots+\frac{h^n}{1.2..n}f^n(x)$$

qui se compose alors d'un nombre indéfini de termes, puisqu'on trouvera toujours, en général des dérivées, quelque loin qu'on aille. On ne sait plus si cette quantité a quelque rapport avec $f(x+h)$. C'est la question qu'on va examiner.

Si la série (1) a une somme, il faut pour la trouver, prendre un nombre limité n de ses termes, en faire la somme et chercher si cette somme tend vers une limite finie et déterminée quand n croît indéfiniment, ou bien, ce qui revient au même, cherchons la différence qui existe entre $f(x+h)$ et cette somme S_n, et voir ce qu'elle devient quand n croît au delà de toute limite.

Soit donc :

$$R=f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)-\text{etc.}-\frac{h^n}{1.2..n}f^n(x).$$

Donnons à R une autre forme en posant

$x+h=z$. d'où $h=z-x$

alors:

$$R=f(z)-f(x)-\frac{z-x}{1}f'(x)-\frac{(z-x)^2}{1.2}f''(x)-\text{etc.}..-\frac{(z-x)^n}{1.2..n}f^n(x).$$

Dans cette expression, x et h, et par suite z, ont actuellement de certaines valeurs déterminées. Mais nous pouvons considérer la quantité litterale x comme une variable, susceptible de prendre toutes les valeurs comprises entre sa valeur actuelle $\underline{x}$, et la valeur z, sous ce point de vue, le second membre est une fonction d'x et on peut en chercher la dérivée.

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\begin{cases}-f'(x)-\frac{z-x}{1}f''(x)-\frac{(z-x)^2}{1.2}f'''(x)-\text{etc.}\\ \quad +f'(x)\quad +\frac{z-x}{1}f''(x+\text{etc.}\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\frac{(z-x)^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^n(x)\quad -\frac{(z-x)^n}{1.2..(n-1)n}f^{(n+1)}(x)\\ +\frac{(z-x)^{n-2}}{1.2...(n-2)}f^{n-1}(x)\quad +\frac{(z-x)^{n-1}}{1.2...(n-1)}f^n(x).\end{cases}$$

Si on fait les réductions, chaque terme de la seconde ligne est détruit par le terme qui précède dans la première, et on a le résultat simple:

$$\frac{\partial R}{\partial x}=-\frac{(z-x)^n}{1.2...n}f^{(n+1)}(x).$$

Je considère maintenant la dérivée de la fonction; $\frac{C(z-x)^{n+1}}{1.2...n(n+1)}$ C étant une constante dont on peut disposer à volonté. Sa dérivée est: $-\frac{C(z-x)^n}{1.2...n}$

Donc :

$$\frac{\partial\left\{R - \frac{C(z-x)^{n+1}}{1.2..(n+1)}\right\}}{\partial z} = \frac{(z-x)^n}{1.2...n}\left\{C - f^{(n+1)}(x)\right\}$$

Supposons pour fixer les idées, que la valeur actuelle de $\underline{x}$ soit moindre que celle de z, alors $z-x>0$. De sorte que le facteur $\frac{(z-x)^n}{1.2..n}$ est un facteur constamment positif. Le second facteur a un signe quelconque, mais on peut disposer de manière qu'il ait un signe déterminé le signe + par exemple.

Soit M la plus grande valeur que puisse acquérir $f^{(n+1)}(x)$, quand x varie depuis sa valeur actuelle jusqu'à la valeur z. (nous admettons évidemment ici que $f^{(n+1)}(x)$ ne prend pas de valeur infinie quand x varie dans cet intervalle.) Ce second facteur sera constamment positif si on fait $C=M$ alors le premier membre de l'équation (2) étant constamment positive, quand $\underline{x}$ $\underline{\text{croît}}$ lui-même de x à z, la fonction (3) $R - \frac{M(z-x)^{n+1}}{1.2..(n+1)}$ est une fonction croissante. D'ailleurs pour la dernière valeur de x, savoir $z=x$, on a $R=0$ et $(z-x)=0$. Donc cette fonction est nulle, pour $z=x$. Donc, puisqu'elle est croissante, elle est négative pour toutes les autres valeurs de x. Ainsi, on a

$$R < \frac{M(z-x)^{n+1}}{1.2...n(n+1)}$$

Maintenant soit m la plus petite des valeurs,

c'est-à-dire la plus rapprochée de l'infini négatif, que prend $f^{n+1}(x)$ quand x varie dans les limites dont nous avons parlé. Si l'on fait $C = m$, le second facteur est constamment négatif. La fonction (3) est donc décroissante. D'ailleurs elle est nulle pour $z = x$. Donc elle est positive pour toutes les autres valeurs d'x. Donc :

$$R > \frac{m(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)}.$$

Supposons maintenant que z soit la plus petite des valeurs de la variable x. Alors il faudra distinguer deux cas suivant que $n+1$ est pair ou impair. Si $n+1$ est pair, le signe du facteur $(z-x)^{n+1}$ est toujours $+$, et dans ce cas les raisonnements précédents et les inégalités qui en résultent subsistent. Si $n+1$ est impair, on fera des raisonnements analogues qui conduisent à des inégalités de sens contraires.

On arrivera donc à une conclusion générale que la quantité R est toujours comprise entre les limites :

$$\frac{M(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}, \qquad \frac{m(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$$

S'il arrive qu'en faisant croître n indéfiniment, ces deux limites tendent vers zéro, il en sera de même pour R qui est constamment compris entre elles. Mais on a toujours, dans tous les cas, ce théorème, savoir, la différence entre $f(x+h)$ et le développement (1) est toujours comprise, en rétablissant la notation h, entre :

$$\frac{Mh^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)}, \text{ et } \frac{mh^{n+1}}{1.2\,.\,.\,n(n+1)}$$

Les seules hypothèses faites pour arriver à ce théorème sont que les quantités $f(z)$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x) \ldots f^{n}(x)$ ont des valeurs finies pour la valeur actuelle d'x et pour la valeur z, et que de plus la fonction $f^{(n+1)}(t)$ a une valeur finie pour toutes les valeurs de la variable t comprise entre x et $x+h$. On peut d'ailleurs faire voir que ces conditions supposent implicitement que $f(x)$ et ses dérivées jusqu'à celle de l'ordre n, sont des fonctions finies et continues.

Il suffit pour cela de se rappeler la formule générale :

$$F(x+h) - F(x) = h\left\{F'(x) + \varepsilon\right\}$$

Mais maintenant si nous supposons de plus que la fonction $f^{n+1}(t)$ soit continue pour toutes les valeurs de t comprises entre $\underline{x}$ et $\underline{z}$, il est clair que cette fonction passera par tous les états de grandeur intermédiaires entre M et m. Mais, puisque R est compris entre $\frac{M\,h^{n+1}}{1.2\,.\,.\,(n+1)}$ et $\frac{m\,h^{n+1}}{1.2\,.\,.\,(n+1)}$

M et m comprennent entre eux le facteur par lequel il faut multiplier $\frac{h^{n+1}}{1.2\,.\,.\,n(n+1)}$ pour avoir R. Ce facteur est une valeur que prendra $f^{(n+1)}(x)$ pour une certaine valeur de la variable x comprise entre la valeur actuelle d'x et la valeur z. Soit $x+\theta h$ cette valeur, θ étant un nombre compris entre <u>zéro</u> et <u>un</u>. Alors

$$R = \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{n+1}(x+\theta h),$$ et par suite la série dite de Taylor :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \text{etc}$$

$$+ \frac{h^n}{1.2\ldots n} f''(x) + \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{n+1}(x+\theta h)$$

On a trouvé la formule de Taylor, savoir :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f(x) + \frac{h^2}{1.2} f'(x) + \text{etc.} + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x)$$

$$+ \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)} f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Dans cette formule, θ représente une quantité comprise entre zéro et un, et qui d'ailleurs dépend de x, de h et de l'indice n.

L'expression du reste contient la dérivée de l'ordre $n+1$, laquelle ne figure pas dans la somme des $n+1$ premiers termes de la série $f(x) + \frac{h}{1} f(x) + \text{etc.}$ que l'on a considérée. Afin d'éviter d'employer cette dérivée, bornons la série à ses n premiers termes, et nous aurons la formule qu'on emploie en général :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x)$$

$$+ \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x+\theta h)$$

θ ne représente pas ici la même quantité que dans la formule précédente. Mais c'est toujours une

quantité comprise entre zéro et 1, et il n'y aura plus ambiguïté à employer la même lettre θ, car c'est une de ces deux formules seulement qui sera dans les calculs. On peut écrire la dernière :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{1.2..n} f^n(x)$$

$$+ \frac{h^n}{1.2..n} \left\{ f^n(x+\theta h) - f^n(x) \right\}$$

et alors le reste R prend la forme :

$$R = \frac{h^n}{1.2..n} \left\{ f^n(x+\theta h) - f^n(x) \right\}$$

et on suppose dans cette formule que $f^n(t)$ soit une fonction finie et continue pour toutes les valeurs de la variable t comprise entre x et $x+h$.

Le reste étant mis sous cette forme, on arrive facilement au théorème suivant.

Supposons que $f^n(x)$ ne soit pas nul ; je dis qu'on peut prendre h assez petit pour que le rapport du reste R, au terme précédent soit aussi petit qu'on voudra ; ou, en d'autres termes, quand h est infiniment petit, le terme auquel on borne la série est infiniment grand par rapport au reste de la série.

En effet, le rapport de ces deux quantités est :

$$\frac{f^n(x+\theta h) - f^n(x)}{f^n(x)}$$

$f^{(n}(x)$ n'étant pas nul, si l'on fait tendre h vers zéro, θ varie, mais ne sort pas de la limite zéro

est 1; donc le numérateur de ce rapport tend vers zéro.

Dans le développement de la formule de Taylor, $f(x)$ est appelé une quantité *finie*. Le terme suivant $\frac{h}{1} f'(x)$ est dit *un infiniment petit du premier ordre*, c'est-à-dire que son rapport à h, est une quantité finie. Le terme $\frac{h^2}{1.2} f''(x)$ est un infiniment petit du 2e ordre, et ainsi de suite. On dit dans le même sens que tout-à-l'heure, que chaque terme du développement est infiniment petit par rapport au terme précédent, pourvu toutefois que ce terme précédent ne soit pas nul. Il suit de là que le reste R est infiniment petit par rapport à un terme quelconque de la série, pourvu que ce terme ne soit pas zéro.

On peut encore donner au reste une nouvelle forme, qui est souvent employée. Pour cela, bornons la série de Taylor à ses deux premiers termes:

$$(1). \quad F(x+h) = F(x) + h\, F(x+\lambda h)$$

λ étant compris entre 0 et 1. Or le reste R est égal à:

$$R = f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1} f'(x) - \text{etc.}$$

Si on pose $z - x = h$, on a:

$$R = f(z) - f(x) - \frac{z-x}{1} f'(x) - \frac{(z-x)}{1.2} f''(x) - \text{etc.}$$

Ainsi qu'on l'a vu, on peut considérer cette quantité comme une fonction de x; nous la désignerons par $R(x)$ et sa dérivée par $R'(x)$. Or on a:

$$R'(x) = -\frac{(z-x)^n}{1.2..n} f^{(n+1)}(x)$$

donc d'après la formule (1), on a :

$R(x)$ ou bien $R(z+\overline{x-z}) =$

$R(z) + (x-z) R'[z + \lambda(x-z)]$.

Or $R(z) = 0$, puisque $R(z)$ représente le résultat de la substitution de z à la place de x dans le polynôme R. Ensuite $R'[z+\lambda(x-z)]$ représente le résultat de la substitution de $z+\lambda(x-z)$ à la place de x dans la dérivée $R'(x)$. Donc on a :

$$R(x) = -(x-z)\frac{[z-z-\lambda(x-z)]^n}{1.2.3.....n} f^{(n+1)}[z+\lambda(x-z)]$$

$$R(x) = \frac{\lambda^n (z-x)^{n+1}}{1.2.3...n} f^{(n+1)}[\lambda x + (1-\lambda) z].$$

Posons $\lambda = 1-\theta$ d'où $\theta = 1-\lambda$,
θ étant par conséquent compris entre zéro et 1.
On aura :

$$R(x) = \frac{(1-\theta)^n h^{n+1}}{1.2.3...n} f^{(n+1)}(x - \theta x + \theta x + \theta h)$$

$$R(x) = \frac{(1-\theta)^n h^{n+1}}{1.2.3...n} f^{n+1}(x+\theta h).$$

La série de Taylor sera donc :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{1.2..n} f^n(x)$$
$$+ \frac{(1-\theta)^n h^{n+1}}{1.2.....n} f^{(n+1)}(x+\theta h)$$

Soit $f(x) = x^m$; on a dans ce cas :

$$f'(x) = mx^{m-1}, f''(x) = m(m-1)x^{m-2},$$

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3} \text{ etc. Enfin}$$

$$f^n(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n} \quad \text{et}$$

$$f^{(n+1)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n)x^{m-n-1}.$$

Donc d'après la formule de Taylor :

$$(x+h)^m = x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}x^{m-2}h^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2\ldots\ldots n}x^{m-n}h^n$$
$$+ (1-\theta)^n \cdot \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n)}{1.\ 2\ldots\ldots n}(x+\theta h)^{m-n-1}h^{n+1}$$

le reste R peut s'écrire :

$$R = m(x+\theta h)^{m-1} \cdot h\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1.\ 2\ldots\ldots n}\left(\frac{h-\theta h}{x+\theta h}\right)^n$$

Il s'agit d'examiner ce que devient ce reste quand n croît indéfiniment. Or m et h sont des quantités données et fixes ; θ ne varie qu'entre zéro et 1, en sorte que $(x+\theta h)^{m-1}$ ne varie qu'entre x^{m-1} et $(x+h)^{m-1}$. Si donc nous supposons que $\frac{h}{x}$ est <1, en valeur absolue, x^{m-1} et $(x+h)^{m-1}$ sont alors toujours de même signe ; par conséquent $(x+\theta h)^{m-1}$ ne devenant jamais nul, n'influe pas sur la discussion du reste R. Il reste donc à considérer le facteur :

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)(m-n)}{1.\quad 2.\quad\quad (n-1)\ n}\left(\frac{h-\theta h}{x+\theta h}\right)^n.$$

Soit i un nombre aussi grand qu'on voudra, mais fixe. On peut écrire ce second facteur :

$$\left\{\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-i)}{1.\quad 2 \qquad\quad i}\left(\frac{h-\theta h}{x+\theta h}\right)^i\right\}\times\left(\frac{m-i-1}{i+1}\ \frac{h-\theta h}{x+\theta h}\right)$$

$$\times\left(\frac{m-i-2}{1+2}\cdot\frac{h-\theta h}{x+\theta h}\right)\ldots\ldots\left(\frac{m-n}{n}\cdot\frac{h-\theta h}{x+\theta h}\right).$$

quelque grand que soit i, puisque c'est un nombre fixe, le facteur entre parenthèses a une valeur finie, et n'influe pas par conséquent sur la discussion du reste R, puisque $h-\theta h$ ne dépasse jamais $2h$.

Considérons les autres facteurs dont le nombre augmente indéfiniment avec n. L'un d'eux est égal à :

$$\left(\frac{m-i-1}{i+1}\right)\frac{h-\theta h}{x+\theta h}=\left(-1+\frac{m}{i+1}\right)\left(\frac{h-\theta h}{x+\theta h}\right).$$

On peut prendre i assez grand pour le 1er facteur soit compris entre zéro et -1. Quant à l'autre, il est clair que, dans le cas où h et x sont de même signe, il est plus petit que $\frac{h}{x}$; dans le cas où h et x sont de signes contraires, cela a encore lieu. En effet, soit $h=-K$, alors ce facteur devient

$$\frac{-K+\theta K}{x-\theta K}$$ ou abstraction ~~faite~~ du signe $$\frac{K-\theta K}{x-\theta K}.$$

C'est là la valeur absolue de ce facteur. Or, par hypothèse, $\frac{K}{x}$ est <1 puisqu'il ne s'agit toujours que des valeurs absolues ; et on sait que quand on retranche une même quantité des deux termes d'une fraction moindre que 1, le résultat est moindre que

cette fraction. Donc dans tous les cas $\frac{h-\theta h}{x+\theta h} < \frac{h}{x}$.

Donc aussi $\left(\frac{m-i-1}{i+1}\right)\left(\frac{h-\theta h}{x+\theta h}\right)$ est dans tous les cas moindre qu'une quantité l comprise entre 1 et $\frac{h}{x}$; quelque près de l'unité que soit $\frac{h}{x}$ on pourra toujours assigner une valeur à cette quantité l.

Comme cela a lieu pour chacun des $n-1$ facteurs que nous considérons, il s'ensuit que leur produit est moindre que l^{n-i}; et l étant < 1, il s'ensuit que le reste R tend vers zéro quand n croît indéfiniment. Donc on a le développement illimité:

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2 + \dots\dots$$

Mais pour que le développement soit celui de $(x+h)^m$, il faut qu'en valeur absolue on ait: $\frac{h}{x} < 1$.

Si on supposait au contraire $\frac{h}{x} > 1$, car le rapport d'un terme au suivant est:

$\frac{m-n}{n+1}\cdot\frac{h}{x} = \left(\frac{m+1}{n+1} - 1\right)\frac{h}{x}$. A mesure que n augmente de plus en plus, le premier facteur tend vers -1, l'autre $\frac{h}{x}$ est plus grand que 1. Donc la limite de ce rapport est $-\frac{h}{x}$. Les termes vont donc en grandissant indéfiniment; donc la série n'est pas convergente.

Si enfin $x = h$, il pourra se faire que dans certains cas la série soit convergente et que dans d'autres, elle ne le soit pas.

On a supposé dans ce qui précède que la variable était réelle, et cette hypothèse sera toujours sous-entendue, à moins qu'on n'avertisse du contraire. Si la fonction était imaginaire de la forme :

$$f(x) = f_1(x) + \sqrt{-1}\, f_2(x)$$

alors on aurait :

$$f(x+h) = f_1(x+h) + \sqrt{-1}\, f_2(x+h).$$

On développerait respectivement les fonctions réelles $f_1(x+h)$ et $f_2(x+h)$, et on aurait le développement de $f(x+h)$.

2°. Soit $f(x) = L\,x$. Dans ce cas

$$f'(x) = \frac{Le}{x} = Le\,.\,x^{-1}$$

$$f''(x) = -1.\,Le\,.\,x^{-2} \quad f'''(x) = +1.2.\,Le\,x^{-3}$$

$$f^{IV}(x) = -1.2.3.\,Le\,.\,x^{-4}.$$

. . . .

$$f^{n}(x) = \pm 1.2.3\ldots(n-1)\,Le\,.\,x^{-n}$$

$$f^{n+1}(x) = \mp 1.2.3\ldots n\,.\,Le\,.\,x^{-n-1}.$$

On a donc :

$$L(x+h) = L(x) + Le\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \text{etc.}\right.$$

$$\left.\pm \frac{h^n}{nx^n} \mp \frac{(1-\theta)^n h^{n+1}}{(x+\theta h)^{n+1}}\right).$$

Ce qui détermine la convergence ou la divergence de la série, c'est le terme :

$$\frac{(1-\theta)^n h^{n+1}}{(x+\theta h)^{n+1}} = \frac{h}{x+\theta h}\left(\frac{h-\theta h}{x+\theta h}\right)^n$$

On fera voir comme précédemment que $\frac{h-\theta h}{x+\theta h}$ est $< \frac{h}{x}$ si $\frac{h}{x} < 1$ en valeur absolue, et par conséquent que $\left(\frac{h-\theta h}{x+\theta h}\right)^n$ diminue indéfiniment. D'ailleurs l'autre facteur ne devient pas infini. Donc le reste de la série tend vers zéro; donc la série est convergente si $\frac{h}{x}$ est < 1.

Elle serait divergente si $\frac{h}{x} > 1$, et enfin pour $x = h$, on aurait encore un cas douteux.

On a trouvé, dans le cas de $\frac{h}{x} < 1$,

$$(x+h)^m = x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}h + \text{etc.}$$

Si on demande quel est le degré d'approximation qu'on obtient à s'arrêtant à un certain terme du second membre, on pourra prendre le rapport:

$$\frac{m-n}{n+1}\cdot\frac{h}{x} = \left(\frac{m+1}{n+1} - 1\right)\frac{h}{x}.$$

En donnant à n une valeur suffisamment grande, le premier facteur pourra être rendu négatif. Alors, si h et x sont de même signe, tous les termes suivants sont négatifs, et par conséquent, l'erreur est négative, et moindre que la somme d'une série géométrique qu'il est facile d'obtenir. Si h et x sont de signes contraires, les termes sont

alternativement positifs et négatifs ; donc l'erreur est moindre que le terme auquel on s'arrête.

Généralement, pour obtenir le degré d'approximation. On pourra employer deux méthodes ; ou bien celle qui repose sur l'emploi de la série de Taylor, car on a ainsi qu'on l'a vu, deux limites entre lesquelles est comprise l'erreur qu'on commet. Mais quand on a démontré que la série est convergente, et qu'elle a pour somme $f(x+h)$, l'erreur qu'on commet est égale au reste de la série du second membre, reste qu'on peut toujours discuter d'après les méthodes qui ont été données.

On a :

$$L(x+h) = Lx + Le\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \dots\right)$$

On a vu que la série est convergente et qu'elle a pour somme $L(x+h)$, quand $\frac{h}{x} < 1$ numériquement parlant ; on suppose $x > 0$, puisqu'on emploie Lx. quant à h, il peut être positif ou négatif ; mais la série converge d'autant plus rapidement que la valeur absolue de $\frac{h}{x}$ est plus petite.

On peut déduire de cette série, d'autres séries encore plus convergentes. Posons $x = 1$, on a

$$L(1+h) = Le\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \dots\right).$$

Je change h en $-h$; si la condition de $h < 1$ en valeur numérique est remplie il est clair qu'on aura la série convergente :

$$L(1+h) = Le\left(-h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} - \text{etc}\right)$$

$$= 2\,\mathrm{L}e\left\{\frac{1}{2p^2-1} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2p^2-1)^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{(2p^2-1)^5} + \cdots\right\}.$$

En retranchant membre à membre, les puissances paires se détruisent deux à deux, et on a :

$$\mathrm{L}(1+h) - \mathrm{L}(1-h) = \mathrm{L}\left(\frac{1+h}{1-h}\right)$$

$$= 2\,\mathrm{L}e\left(h + \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} + \cdots\right).$$

La convergence de cette série est très rapide si h est assez petit. Posons maintenant :

$$\frac{1+h}{1-h} = \frac{m}{n} \quad \text{d'où} \quad \frac{2h}{2} = h = \frac{m-n}{m+n}$$

$$\mathrm{L}\left(\frac{m}{n}\right) = \mathrm{L}m - \mathrm{L}n = 2\,\mathrm{L}e\left\{\frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \cdots\right\}.$$

Si m et n sont des nombres assez grands, et si leur différence est petite, l'approximation est très-rapide dans cette formule.

On peut obtenir une formule qui donne le logarithme d'un nombre entier au moyen des logarithmes des deux nombres entiers qui le précèdent. Pour celà, soit $m = p^2$, et $n = p^2 - 1$ alors $m - n = 1$, et $m + n = 2p^2 - 1$ et on a :

$$\mathrm{L}\left(\frac{m}{n}\right) = \mathrm{L}\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right) = 2\,\mathrm{L}p - \mathrm{L}(p+1) - \mathrm{L}(p-1)$$

$$= 2\,\mathrm{L}e\left\{\frac{1}{2p^2-1} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2p^2-1)^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{(2p^2-1)^5} + \cdots\right\}$$

Si on veut donner à p des valeurs qui ne soient pas entières, on n'aura à changer p en $\frac{p}{q}$; et on aura :

$$2Lp - 2Lq - L(p+q) + Lq - L(p-q) + Lq$$

$$= 2Lp - L(p+q) - L(p-q)$$

$$= 2Le\left\{\frac{q^2}{2p^2-q^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{q^2}{2p^2-q^2}\right)^3 + \cdots\right\}$$

On peut donner encore d'autres formules qui peuvent servir à vérifier des tables de logarithmes déjà construites. On devra pour cela prendre plus ou moins de termes de la série suivant que les tables devront contenir un plus ou moins grand nombre de décimales exactes. Par exemple dans la formule qui donne $L\left(\frac{m}{n}\right) = Lm - Ln$ en bornant la série à son premier terme $Le\,\frac{m-n}{m+n}$, l'erreur commise sera de l'ordre du cube de la quantité $\frac{m-n}{m+n}$.

Si on voulait avoir les logarithmes népériens, on n'aurait qu'à poser $Le = \log. e = 1$

Reprenons la formule :

$$L(1+h) = Le\left(\frac{h}{1} - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \cdots\right)$$

Posons $1+h = b$, d'où $h = b-1$

On aura :

$$L(b) = Le\left\{b-1 - \frac{(b-1)^2}{2} + \frac{(b-1)^3}{3} - \cdots\right\}$$

Nous avons vu que cette série n'est convergente que sous la condition soit inférieure à 2. Je dis que cette formule peut en donner une autre propre à donner le logarithme d'un nombre quelconque. En effet soit p un nombre quelconque ; extrayons sa racine $n^{ème}$, $\sqrt[n]{p}$; on peut rendre n assez grand pour que $\sqrt[n]{p}$ diffère de l'unité d'aussi peu qu'on voudra :

$$\sqrt[n]{p} = 1 + \left(\sqrt[n]{p} - 1\right)$$

$\sqrt[n]{p} - 1$ étant une petite quantité positive

Soit $b = \sqrt[n]{p}$ d'où $b - 1 = \sqrt[n]{p} - 1$.

alors :

$$L\left(\sqrt[n]{p}\right) = \frac{1}{n} L p = Le\left\{\sqrt[n]{p} - 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{p} - 1\right)^2 + \cdots\right\}$$

$$= Le\left(\sqrt[n]{p} - 1\right)\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{p} - 1\right) + \frac{1}{3}\left(\sqrt[n]{p} - 1\right)^2 - \cdots\right\}$$

Série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, et dont la valeur numérique va constamment en diminuant. Par conséquent Lp est une quantité comprise entre

$$n\,Le\left(\sqrt[n]{p} - 1\right), \text{ et } n\,Le\left(\sqrt[n]{p} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{p} - 1\right)\right)$$

Si n est suffisamment grand ces deux limites sont assez rapprochées. Quand $n = \infty$, on a :

$Lp = n\,Le\left(\sqrt[n]{p} - 1\right)$.

C'est-à-dire qu'à mesure que n croît indéfiniment la quantité $n\,Le\left(\sqrt[n]{p} - 1\right)$ s'approche indéfiniment de Lp.

Si on prend les logarithmes népériens, on a $\log. p = n\left(\sqrt[n]{p} - 1\right)$ pour $n = \infty$, et si on fait $p = e$,

on a :

$$1 = n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right). \text{ Donc } e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ pour } n = \infty.$$

Quand on emploie les tables logarithmiques, on suppose que l'accroissement des logarithmes est proportionnel à l'accroissement des nombres. On peut voir pourquoi cette hypothèse ne peut être faite qu'à partir d'un certain nombre pris dans les tables.

Prenons la formule générale :

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x + \theta h)$$

et faisons $f(x) = L x$. On a :

$$f'(x) = \frac{Le}{x}. \text{ Par suite :}$$

$$L(x+h) - L(x) = h \cdot \frac{Le}{x+\theta h} = \frac{hLe}{x}\left(\frac{1}{1+\frac{\theta h}{x}}\right).$$

Le facteur $\dfrac{1}{1+\frac{\theta h}{x}}$ n'est pas égal à l'unité, car $\dfrac{\theta h}{x}$ n'est pas nul, et ne demeure pas constant quand h varie. Mais à cause des limites de ses facteurs, le produit θh est compris entre 0 et 1. Donc la différence des deux logarithmes, est comprise entre

$$\frac{hLe}{x} \text{ et } \frac{hLe}{x}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$$

cette dernière limite peut s'écrire :

$$\frac{hLe}{x}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{hLe}{x}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right).$$

Si ces deux limites entre lesquels est compris l'accroissement logarithmique contient un nombre

de décimales communes, égal à celui que doivent contenir les tables, alors $\frac{hLe}{x}$ pourra être considéré comme l'accroissement logarithmique lui-même; on aura les décimales exactes voulues au moyen d'une quantité $\frac{hLe}{x}$ proportionnelle à l'accroissement h des nombres. Mais pour cela il faut que x soit d'une certaine grandeur. C'est pour cela que dans les tables, on ne se sert des différences tabulaires qu'à partir d'un certain nombre, qui est d'autant plus grand que l'on veut un plus grand nombre de décimales exactes.

Série de Mac-laurin.

Prenons la formule de Taylor.

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \cdots + \frac{h^n}{1.2\cdots n} f^n(x) + R$$

le reste R étant susceptible de trois expressions différentes.

$$R = \frac{h^{n+1}}{1.2\cdots n(n+1)} f^{n+1}(x+\theta h)$$

$$R = \frac{h^n}{1.2\cdots n} \left\{ f^n(x+\theta h) - f^n(x) \right\}$$

$$R = \frac{(1-\theta)^n h^{n+1}}{1.2\ldots n} f^{n+1}(x+\theta h).$$

La première de ces formes a l'avantage de rappeler les limites de R; car il suffit pour les obtenir de trouver les valeurs limites M et de $f^{n+1}(x+\theta h)$.

Faisons $x = 0$

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1} f'(0) + \dots + \frac{h^n}{1.2..n} f^n(0) + R$$

Le reste R prend alors les trois formes :

$$R = \frac{h^{n+1}}{1.2\dots n(n+1)} f^{n+1}(\theta h)$$

$$R = \frac{h^n}{1.2\dots n} \left\{ f^n(\theta h) - f^n(\theta) \right\}$$

$$R = \frac{(1-\theta)^n h^{n+1}}{1.2\dots n} f^{n+1}(\theta h)$$

La quantité θ change, mais elle est toujours comprise entre zéro et 1.

Maintenant changeons h en x, et nous aurons la formule de Mac-laurin qui donne le développement de $f(x)$ au moyen des puissances de la variable x.

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \dots + \frac{x^n}{1.2..n} f^n(0) + R.$$

Soit $f(x) = a^x$, prenons la première forme du reste, et nous aurons la formule :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \dots\dots$$

$$+ \frac{x^n}{1.2..n} f^n(0) + \frac{x^{n+1}}{1.2..n(n+1)} f^{n+1}(\theta x).$$

On a d'ailleurs :

$$f'(x) = a^x \log.a, \quad f''(x) = a^x (\log.a)^2 \dots\dots$$

$$f^n(x) = a^x (\log.a)^n \qquad f^{n+1}(x) = a^x (\log.a)^{n+1}$$

Par suite :

$$f(0)=1 \quad f'(0)=\log.a, \; f''(0)=(\log.a)^2$$
$$f^n(0)=(\log.a)^n \quad f^{n+1}(0)=(\log.a)^{n+1}$$

Donc :

$$a^x=1+\frac{x\log.a}{1}+\frac{x^2(\log.a)^2}{1.2}+\frac{x^3(\log.a)^3}{1.2.3}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{x^n(\log.a)^n}{1.2\ldots n}+\frac{x^{n+1}(\log.a)^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)}a^{\theta x}.$$

Examinons le reste de la formule, savoir $\frac{x^{n+1}(\log.a)^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)}a^{\theta x}$, le facteur $a^{\theta x}$ est compris entre les deux limites 1 et a^x. Quant à l'autre facteur, on peut l'écrire :

$$\frac{(x\log.a)^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)}=\frac{(x\log.a)^i}{1.2\ldots i}\left(\frac{x\log.a}{i+1}\right)\left(\frac{x\log.a}{i+2}\right)\cdots\left(\frac{x\log.a}{n-i+1}\right)$$

i étant un nombre fixe mais arbitraire, le premier facteur a une valeur constante, et on peut choisir i assez grand puisque le facteur $\frac{x\log.a}{i+1}$ soit plus petit que l'unité ; soit K sa valeur : les facteurs suivants sont tous moindres que K. Donc leur produit est moindre que K^{n-i+1}, quantité qui tend vers zéro, quand n croît indéfiniment.

Donc la série est convergente et elle a pour somme a^x. Donc :

$$a^x=1+\frac{x\log.a}{1}+\cdots+\frac{x^n(\log.a)^n}{1.2\ldots n}+\cdots\cdots$$

Posons maintenant $a=e$. alors :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots\cdots$$

et si on fait $x = 1$,

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots\cdots$$

De sorte que si la valeur de e n'était pas connue, on la trouverait actuellement si on fait $x = -1$. On a :

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Soit $f(x) = \sin. x$. On a :

$f'(x) = \cos. x$ $f''(x) = -\sin. x$. $f'''(x) = -\cos. x$ et ainsi de suite périodiquement.

Donc $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ et $f'''(0) = -1$ et ainsi de suite.

Je suppose que le nombre auquel je m'arrête soit un nombre pair $n = 2m$. On a alors :

$$\sin. x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots \pm \frac{x^{2m}}{1.2\ldots m} \mp \frac{x^{2m+1}}{1.2\ldots(2m+1)} \cos.\theta x.$$

$\cos.\theta x$ est compris entre zéro et 1. Quant à l'autre facteur du reste :

$$\frac{x^{2m+1}}{1.2\ldots(2m+1)} = \frac{x^i}{1.2\ldots i}\left(\frac{x}{i+1}\right)\left(\frac{x}{i+2}\right)\cdots\left(\frac{x}{2m+1}\right)$$

on peut prendre i assez grand pour que $\frac{x}{i+1}$ soit < 1. Soit K sa valeur, etc. On conclut comme précédemment que la série est convergente et qu'elle a pour somme $\sin. x$. Donc :

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots\cdots \text{ à l'infini.}$$

Pour le développement de cos. x, on se servira des mêmes principes, et on arrive à :

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Il est bien entendu que dans ces formules l'arc x est pris dans un cercle dont le rayon est égal à l'unité.

Pour calculer le sinus et le cosinus d'un arc d'un nombre donné de degré, on pourra se servir de ces formules. Mais il faut prendre l'arc dans le cercle de rayon $= 1$. Ainsi pour calculer $\sin. 27°$, on posera la proportion

$$x : \pi :: 27 : 180 \text{ . d'où}$$

$$x = \frac{27\pi}{180}.$$

On pourrait de la formule de Mac-laurin déduire la formule de Taylor, retrouver par la formule de Mac-laurin la formule du binôme, en prenant $f(x) = (1+x)^m$, développer a^{x+h} par la formule de Taylor, ainsi que

$$\sin. (x+h) = \sin x \cos. h + \cos. x \sin h.$$

La quantité e^x devant être employée dans l'analyse des fonctions, il est important de bien définir ce qu'elle représente. On a trouvé :

$$(1) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{\&ca.}$$

Quand on donne à x, pour valeurs, des nombres entiers positifs ou négatifs, on a des expressions

$$e, e^2, e^3 \ldots\ldots \frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^3}, \text{etc.}$$

qui n'ont chacune qu'une seule valeur ; que l'on peut facilement calculer au moyen de la série avec un nombre quelconque de décimales, on trouvera ainsi : $e = 2,71828\,1828 \ldots$. Mais si on donne à x des valeurs $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ etc. On aura des expressions ayant 1° deux valeurs réelles, l'une positive ou négative, 2° une valeur positive et deux imaginaires,
3°. deux valeurs imaginaires, une valeur positive et une négative et ainsi de suite.

Dans le cas, où x est incommensurable, il y a d'autres difficultés, car un nombre incommensurable peut être considéré comme un nombre fractionnaire dont le numérateur et le dénominateur sont infinis, et un nombre infini peut être considéré comme pair ou impair. Mais parmi toutes les valeurs de la fonction e^x, les valeurs réelles sont les seules qui forment une fonction continue. Et comme c'est spécialement des fonctions continues qu'on s'occupe dans l'analyse des fonctions, on désignera toujours par e^x la val... réelle et positive de cette fonction. Ainsi dans le cas où x est réel, e^x est une quantité essentiellement positive.

Maintenant définissons e^x dans le cas où x est imaginaire : Je désigne par $e^{x\sqrt{-1}}$. Ce que devient la série (1), quand on y remplace x par $x\sqrt{-1}$.

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \&c^a.$$

Il faut pour que cette définition conduise à de bons résultats, qu'elle donne un résultat exact quand

l'imaginaire disparaît. Or si on fait $x=0$, on a l'unité. Donc cette définition est permise.

En groupant les termes de $e^{x\sqrt{-1}}$

$$e^{x\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots\cdots\right)$$

$$+ \sqrt{-1}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots\cdots\right)$$

donc $e^{x\sqrt{-1}} = \cos.x + \sqrt{-1}\sin.x$.

Maintenant, par définition encore, je désigne par $e^{x+y\sqrt{-1}}$, le produit de e^x par $e^{y\sqrt{-1}}$; il faut pour que cette définition soit permise, qu'elle donne un résultat exact quand l'imaginaire disparaît, et c'est ce qui a lieu.

Donc $e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x(\cos.y + \sqrt{-1}\sin.y)$

C'est une quantité imaginaire de la forme ordinaire $p + q\sqrt{-1}$.

Ainsi x étant réel ou imaginaire, on saura toujours le sens précis de e^x.

Examinons maintenant si l'équation :

$e^u e^v = e^{u+v}$ a lieu quand u et v sont imaginaires.

Soient :

$$u = x + y\sqrt{-1}, \quad v = x' + y'\sqrt{-1},$$

on aura :

$$e^u = e^x(\cos.y + \sqrt{-1}\sin.y), \; e^v = e^{x'}(\cos.y' + \sqrt{-1}\sin y')$$

Donc $e^u.e^v = e^x.e^{x'}\left\{\cos.(y+y') + \sqrt{-1}\sin(y+y')\right\}$

Or x et x' sont réels ; donc $e^x \cdot e^{x'} = e^{x+x'}$.

Donc :

$$e^u \cdot e^v = e^{x+x'}\left\{\cos.(y+y') + \sqrt{-1}\sin(y+y')\right\}$$

$$= e^{(x+x')+(y+y')\sqrt{-1}} = e^{u+v}$$

Donc le caractère fondamental des fonctions exponentielles subsiste avec la nouvelle définition.

Il en est de même pour les règles de la différentiation. En effet, dans le cas où u est réel, on a trouvé $de^u = e^u du$.

Supposons u imaginaire : $u = p + q\sqrt{-1}$, p et q étant des fonctions d'une ou plusieurs variables, alors :

$$de^u = d\left(e^{p+q\sqrt{-1}}\right) = d\left\{e^p(\cos.q + \sqrt{-1}\sin q)\right\}$$

$$= e^p\cos.q\,dp - e^p\sin q\,dq + \sqrt{-1}\left(e^p\sin.q\,dp + e^p\cos q\,dq\right)$$

$$= e^p\cos.q\,(dp + \sqrt{-1}\,dq) + \sqrt{-1}\sin.q\,(dp + \sqrt{-1}\,dq)$$

Or $dp + \sqrt{-1}\,dq = du$

Donc $de^u = e^p(\cos.q + \sqrt{-1}\sin.q)\,du = e^u du$.

La règle de différentiation est donc la même.

Tout ce qu'on déduit en arithmétique de l'équation fondamentale $e^u \cdot e^v = e^{u+v}$, par exemple $e^u e^v e^w = e^{u+v+w}$.

$(e^u)^n = e^{nu}$, l'extension au cas de u fractionnaire et négatif, tout cela subsiste également avec la nouvelle définition.

On a trouvé :

$$e^{z\sqrt{-1}} = \cos.x + \sqrt{-1}\sin.x.$$

Changeons x en $-x$, on aura :

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos.x - \sqrt{-1}\,\sin.x$$

on en déduit :

$$\cos.x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin.x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

On pourrait partir de ces formules pour définir $\sin.(x+y\sqrt{-1})$ et $\cos(x+y\sqrt{-1})$, puisque les seconds membres sont parfaitement déterminés, et prouver que les règles de différentiations, et les formules qui donnent $\sin(x+x')$, $\cos.(x+x')$ &c. demeurent les mêmes dans le cas où les arcs x et x' sont imaginaires.

De la formule $\cos.x = \frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right)$

on déduit la formule qui donne $\cos.x$, car on a :

$$\cos.^m x = \frac{1}{2^m}\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right)^m$$

Donc :

$$(1)\quad \cos.^m x = \frac{1}{2^m}\Big(e^{mx\sqrt{-1}} + \frac{m}{1}e^{(m-1)x\sqrt{-1}}e^{-x\sqrt{-1}} + \frac{m(m-1)}{1.2}e^{(m-2)x\sqrt{-1}}e^{-2x\sqrt{-1}}$$

$$+ \dots + \frac{m(m-1)}{1.2}e^{-(m-1)x\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{m}{1}e^{x\sqrt{-1}}e^{-(m-1)x\sqrt{-1}} + e^{-mx\sqrt{-1}}\Big).$$

Groupons deux à deux les termes à égale distance des extrêmes :

$$\cos^m x = \frac{1}{2^m}\left\{\left(e^{mx\sqrt{-1}} + e^{-mx\sqrt{-1}}\right) + \frac{m}{1}\left(e^{(m-2)x\sqrt{-1}} + e^{-(m-2)x\sqrt{-1}}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\left(e^{(m-4)x\sqrt{-1}} + e^{-(m-4)x\sqrt{-1}}\right) + \cdots\right\}$$

S'il y a dans le second membre un nombre pair de termes, tous les termes se groupent deux à deux, et s'il y en a un nombre impair il y en a un qui ne se groupe à aucun autre.

Supposons donc d'abord que m soit pair $m = 2n$; le développement contient alors un nombre impair de termes.

Chaque groupe se compose de deux puissances de e dont les exposants sont égaux aux signes près, abstraction faite du moins du coefficient $\sqrt{-1}$; ensuite quand on passe d'un groupe à un autre, cet exposant diminue de deux unités; donc le développement s'arrête quand ce coefficient est nul, et par suite le dernier groupe du développement contient e avec l'exposant $2x\sqrt{-1}$. Or le terme général de (1) est :

$$\frac{m(m-2)\cdots(m-i+1)}{1\cdot 2 \cdots\cdots i}\, e^{(m-i)x\sqrt{-1}} \times e^{-ix\sqrt{-1}}$$

l'exposant de e est $m-2i$:

Posons $m - 2i = 0$ d'où $i = \frac{m}{2} = n$

Donc le dernier terme est :

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2 \cdots\cdots n},$$ et l'avant dernier groupe :

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{1\cdot 2\cdots\cdots(n-1)}\left\{e^{2x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}}\right\}$$

Donc le développement de $\cos.^m x$ est :

$$\cos.^m x = \frac{1}{2^m}\left\{\left(e^{mx\sqrt{-1}} + e^{-mx\sqrt{-1}}\right) + \frac{m}{1}\left(e^{(m-2)x\sqrt{-1}} + e^{-(m-2)x\sqrt{-1}}\right)\right.$$
$$+ \cdots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{1.\,2\,\dots\dots(n-1)}\left(e^{2x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}}\right)$$
$$\left. + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.\,2\,\dots\dots n}\right\}$$

Mais on a vu que :

$$2\cos.mx = e^{mx\sqrt{-1}} + e^{-mx\sqrt{-1}}$$ de même :
$$2\cos.(m-2)x = e^{(m-2)x\sqrt{-1}} + e^{-(m-2)x\sqrt{-1}}$$ &c.

Donc on aura :

$$\cos.^m x = \frac{1}{2^{m-1}}\left\{\cos.mx + \frac{m}{1}\cos.(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\cos.(m-4)x\right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{\frac{1}{2}m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.\,2\,\dots\dots n}\right\}$$

Supposons maintenant que m soit impair $m = 2n+1$; alors le développement contient un nombre pair de termes. Par conséquent le dernier groupe est celui qui contient e avec les puissances $x\sqrt{-1}$ et $-x\sqrt{-1}$.

Posons donc dans ce cas $m-2i=1$.
donc $i = \frac{m-1}{2} = n$. Ce dernier groupe est donc :

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.\,2\,\dots\dots n}\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right)$$

Donc dans ce cas on aura :

$$\cos^m x = \frac{1}{2^{m-1}}\left\{\cos.mx + \frac{m}{1}\cos.(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.\,2}\cos.(m-4)x\right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.\,2\,\dots\dots n}\cos.x\right\}$$

On trouvera de la même manière $\sin^m x$. En effet on a :

$$2\sqrt{-1}\,\sin.x = e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}.$$

Élevons les deux membres à la puissance m, nous aurons :

$$2^m(\sqrt{-1})^m \sin^m x = \left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right)^m.$$

On voit que le premier membre sera réel ou imaginaire suivant que m sera pair ou impair.

$$(1)\; 2^m(\sqrt{-1})^m \sin^m x = e^{mx\sqrt{-1}} - \frac{m}{1} e^{(m-1)x\sqrt{-1}} e^{-x\sqrt{-1}} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} e^{(m-2)x\sqrt{-1}} e^{-2x\sqrt{-1}} \text{ etc.} \pm e^{-mx\sqrt{-1}}.$$

Dans le second membre les termes ont alternativement le signe + et le signe −. Ceux qui ont le signe + sont de rang impair, ceux qui ont le signe − sont de rang pair.

Supposons donc m pair $m = 2n$. Le second membre contient alors un nombre impair de termes ; par conséquent dans ce cas le dernier terme a le signe +, et, en général, les termes qui sont à égale distance des extrêmes ont le même signe. Donc en groupant les termes deux à deux, on aura pour le second membre :

$$\left(e^{mx\sqrt{-1}} + e^{-mx\sqrt{-1}}\right) - \frac{m}{1}\left(e^{(m-2)x\sqrt{-1}} + e^{-(m-2)x\sqrt{-1}}\right) + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\left(e^{(m-4)x\sqrt{-1}} + e^{-(m-4)x\sqrt{-1}}\right)$$

− etc. ... Ces groupes ont alternativement le signe + et le signe −, et ce qu'il s'agit de savoir, c'est le signe du dernier groupe. Car, pour ce qui est de chaque groupe en particulier, la discussion faite pour $\cos.^m x$ se fait ici de la même manière.

Ainsi les deux derniers termes seront :

$$\pm \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots\ldots(n-1)}\left(e^{2x\sqrt{-1}}+e^{-2x\sqrt{-1}}\right)$$

$$\mp \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots n}$$

Or, le second membre de l'équation (1) contient $2n+1$ termes. Celui du milieu en a donc n avant lui, et n après lui. Or ceux qui en ont 1, 3, 5, 7 etc avant eux sont affectés du signe $-$; et ceux qui en ont, 0, 2, 4, 6 ... etc. avant eux sont affectés du signe $+$; car les mêmes signes reviennent de deux en deux termes. Donc si n est impair, le dernier terme est négatif, et il est positif si n est pair. Donc dans le premier cas, il faudra prendre les signes supérieurs, et dans le second les signes inférieurs, pour les termes (2). Mais d'ailleurs, quand m est pair et égal à $2n$; on a:

$(\sqrt{-1})^m = (\sqrt{-1})^{2n} = (-1)^n$, quantité qui est négative quand n est impair, et positive quand n est pair. Donc on peut écrire, en se rappelant d'ailleurs que

$$e^{mx\sqrt{-1}}+e^{-mx\sqrt{-1}} = 2\cos.mx \quad \&c.$$

$$\mp 2^m \sin.^m x = 2\cos.mx - \frac{m}{1}\,2\cos.(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}\,2\cos.(m-4)x - \ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+2)}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots(n-1)}\,2\cos.2x.$$

$$\mp \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots n}.$$

On doit prendre les signes supérieurs ensemble, et les signes inférieurs ensemble; les signes supérieurs

Quand n est impair, c'est-à-dire quand m est impairement pair; les signes inférieurs quand n est pair, c'est-à-dire quand n est pairement pair. Dans les deux cas, on voit que $\sqrt{-1}$ a disparu des deux membres.

Si m est impair soit $m = 2n+1$. Alors le dernier terme $e^{-mx\sqrt{-1}}$ a le signe $-$, et en général, les termes à égale distance des termes extrêmes ont des signes différents. Donc, si on groupe encore les termes deux à deux, on aura dans chaque groupe des différences au lieu de sommes. D'ailleurs ces groupes ont encore alternativement le signe $+$ et le signe $-$. Ce qu'il faut savoir, c'est le signe du dernier groupe. Or, il y a $2n+2$ termes; ce dernier groupe est donc formé par les deux termes qui en ont, l'un n avant lui, l'autre n après lui, c'est-à-dire

$$\pm \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots n}\left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right).$$

Comme précédemment on verra que si n est pair il faudra prendre le signe supérieur, et si n est impair le signe inférieur. Or, on a dans ce cas:

$$e^{mx\sqrt{-1}} - e^{-mx\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\ \sin mx$$

$$e^{(m-2)x\sqrt{-1}} - e^{-(m-2)x\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\ \sin.(m-2)x \ \&c^a \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\ \sin.x.$$

Donc en supprimant le facteur $\sqrt{-1}$, on aura:

$$2^m\left(\sqrt{-1}\right)^{m-1}\sin.^m x = 2\sin.mx - \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}\sin.(m-4)x - \&c^a \ldots$$

$$\pm \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ldots\ n} 2 \sin. x$$

Or, $m-1 = 2n$ est un nombre pair,

Donc $(\sqrt{-1})^{m-1} = (\sqrt{-1})^{2n} = (-1)^n$

quantité qui est réelle, négative si n est impair, positive si n est pair.

Donc on aura :

$$\pm 2^m \sin^m x = 2 \sin mx - \frac{m}{1} 2 \sin. (m-2)x + \frac{m.(m-1)}{1 \cdot 2} 2 \sin. (m-4)$$

$$- \text{etc.} \ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2\ \ldots\ n} 2 \sin. x.$$

En se rappelant qu'on devra prendre les signes supérieurs si n est pair, et les signes inférieurs si n est impair.

On peut remarquer que le développement de $\sin.^m x$ contient tantôt les sinus et tantôt les cosinus des différents multiples de x, tandis que celui de $\cos.^m x$ ne contient jamais que les cosinus. Cela tient à ce que le cosinus jouit de la propriété de ne pas changer quand on change x en $-x$, tandis que ce changement change le signe du sinus.

On a donc $\sin.^m x$ et $\cos.^m x$ sous une forme linéaire, c'est-à-dire par des formules dans lesquelles il n'entre que les premières puissances des sinus et cosinus des divers multiples de x. On peut rapprocher de ces formules celles qui donnent au contraire $\sin. mx$ et $\cos. mx$ en fonction des diverses puissances de $\sin. x$ et de $\cos. x$, formule qu'on déduit de la formule de Moivre

$$(\cos.x+\sqrt{-1}\sin.x)^m=\cos.mx+\sqrt{-1}\sin.mx.$$

On a vu que la quantité e^z est parfaitement déterminée, et n'a qu'une seule valeur quelque soit z. D'abord quand $z=x$, x étant un nombre réel, on a :

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\dots\dots$$

Nous ne considérons que la valeur primitive de e^x, valeur qui est donnée par la série du second membre.

Quand z est imaginaire de la forme $x\sqrt{-1}$, nous avons défini : $e^{x\sqrt{-1}}$, ce que devient le second membre quand on y remplace x par $x\sqrt{-1}$, et on a démontré que :

$$e^{x\sqrt{-1}}=\cos.x+\sqrt{-1}\sin.x.$$

Enfin quand z est de la forme $x+y\sqrt{-1}$, nous avons par définition :

$$e^{x+y\sqrt{-1}}=e^x(\cos.y+\sqrt{-1}\sin.y)$$

Cela posé, considérons l'équation $e^z=b$

e^z étant défini ainsi qu'il précède ; on appelle logarithme népérien d'un nombre b, dans toute sa généralité, toute valeur de z de la forme $p+q\sqrt{-1}$, qui satisfait à cette équation.

Cherchons la forme générale de ces valeurs de z ; nous désignerons les logarithmes imaginaires ainsi définis par le signe $((\log.b))$.

b et z étant des imaginaires de la forme ordinaire, soit :

$$z=x+y\sqrt{-1}\ ,\ b=\rho(\cos.\alpha+\sqrt{-1}\sin.\alpha)$$

On aura :

$$e^{x+y\sqrt{-1}} \text{ ou } e^{x}(\cos.y+\sqrt{-1}\sin.y)=\rho(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha).$$

Ce qui exige que $e^{x}=\rho$, car les modules doivent être égaux. Donc, puisque x et ρ sont réels et que ρ est essentiellement positif, x est le logarithme arithmétique de ρ. $x=\log.\rho$. Ensuite il faut que :

$$\cos.y=\cos.\alpha \text{ et } \sin.y=\sin.\alpha.$$

Donc $y=\alpha+2K\pi$, K étant un nombre entier, positif, nul, ou négatif. Donc on a

$$z \text{ ou } ((\log.b))=\log.\rho+(\alpha+2K\pi)\sqrt{-1}.$$

Il résulte de là que la quantité b a une infinité de logarithmes imaginaires ; car on peut donner à K une infinité de valeurs.

Si b est réel et positif, alors $b=\rho$, il faut que $\cos\alpha=1$ et $\sin\alpha=0$. On peut donc poser $\alpha=0$. Dans ce cas on a :

$((\log.b))=\log.b+2K\pi\sqrt{-1}$, et si on fait $K=0$ on retrouve le logarithme arithmétique de b.

Si b est négatif ; alors $b=-\rho$, donc $\cos.\alpha=-1$ et $\sin.\alpha=0$, on peut donc poser $\alpha=\pi$. Donc dans ce cas :

$$((\log.b))=\log.\rho+(2K+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Pour aucune valeur entière de K le second membre n'est réel ; donc tous les logarithmes d'un nombre négatif sont imaginaires. On arrive à cette conclusion, en vertu des conventions qui ont été faites ; car il est clair que si on considérait toutes les valeurs de e^{x}, dans le cas où par exemple $x=\frac{1}{2}$, e^{x} ayant deux valeurs l'une >0, l'autre <0, on serait

amené à dire que ce nombre <0 a un logarithme réel qui est $\frac{1}{2}$. Mais avec les définitions, que nous avons adoptées, nous arrivons à cette conclusion que tout nombre a une infinité de logarithmes, et que tous les logarithmes d'un nombre négatif sont imaginaires.

Décomposition des fractions rationnelles en fractions simples.

Soient deux Polynômes $f(x)$ et $F(x)$; la quantité $\frac{f(x)}{F(x)}$ est appelée fraction rationnelle.

Soit $F(x) = (x-\alpha)^\alpha F_1(x)$, $F_1(x)$ ne contenant aucun facteur égal à $x-\alpha$. Je dis qu'on peut décomposer la fraction : $\frac{f(x)}{F(x)}$ en deux parties, l'une $\frac{A}{(x-\alpha)^\alpha}$, et l'autre une fraction rationnelle R. Pour le démontrer, il suffit de faire voir qu'on peut déterminer pour R une valeur telle que l'on ait :

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^\alpha} + R.$$

On tire delà :

$$R = \frac{f(x)}{(x-\alpha)^\alpha F_1(x)} - \frac{A}{(x-\alpha)^\alpha} = \frac{f(x) - A F_1(x)}{(x-\alpha)^\alpha F_1(x)}.$$

On voit sous cette forme que R est une fonction rationnelle, et que d'ailleurs A étant arbitraire, on

peut le déterminer de manière que le dénominateur de R contienne le facteur $x-\alpha$, au plus à la puissance $\lambda-1$.

Il faut pour cela que son numérateur le contienne au moins une fois, c'est-à-dire que le numérateur devienne nul pour $x=\alpha$.

Donc $f(\alpha) - A\,F_1(\alpha) = 0$ d'où on tire

$A = \dfrac{f(\alpha)}{F_1(\alpha)}$, A est donc une quantité constante, $F(\alpha)$

n'est pas nul par hypothèse ; donc A n'est pas infini ; si de plus on suppose que $f(x)$ et $F(x)$ n'aient aucun facteur commun, (ce qu'on peut toujours supposer), alors $f(\alpha)$ n'est pas nul. Par conséquent A n'est ni nul ni infini.

D'ailleurs on a : $R = \dfrac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^{\lambda-1}\,F_1(x)}$.

Donc la première décomposition dont nous avons parlé est toujours possible.

Mais on traitera la fraction rationnelle R, absolument comme la fraction proposée ; et on la décomposera en deux parties savoir :

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^{\lambda-1}} + R_1$$

R_1 étant encore une fraction rationnelle, et A_1 une constante qu'on peut déterminer encore de manière que le dénominateur de R_1 contienne au plus la puissance $\lambda-2$ de $x-\alpha$. On trouvera ainsi :

$A_1 = \frac{\varphi(\alpha)}{F_1(\alpha)}$, A_1 n'est pas infini, mais peut être nul; car $\varphi(x)$ peut contenir un ou plusieurs facteurs égaux à $x-\alpha$.

On fera des décompositions analogues sur les diverses fractions rationnelles R_1, R_2, &c. et on aura une suite de numérateurs constants :

$$A \;, A_1 \;, A_2 \;, \ldots\ldots A_{\alpha-1}$$

dont aucun n'est infini, et dont chacun excepté le premier A, peut être nul et correspond aux dénominateurs respectifs ;

$$(x-\alpha)\,,\,(x-\alpha)^{\alpha-1}\,,\,(x-\alpha)^{\alpha-2}\ldots\ldots\ldots\ldots x-\alpha\,.$$

Si on considère maintenant un autre facteur $x-b$ de $F(x)$, on aura une nouvelle série de fractions simples,

$$\frac{B}{(x-b)^{\beta}}\;,\;\frac{B}{(x-b)^{\beta-1}}\;,\ldots\ldots\ldots\frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$

Et ainsi de suite; on arrivera donc au quotient de $F(x)$ par le produit de tous ses facteurs fonctions d'x, c'est-à-dire à une constante E. Donc on aura :

$$\frac{f(x)}{F(x)} = F + \frac{A}{(x-\alpha)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\alpha-1}} + \&c.$$

$$+ \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \&c.$$

$$+ \&c.$$

La décomposition de la fonction rationnelle en fractions simples est donc toujours possible. Je dis maintenant qu'elle n'est possible que d'une seule manière, ou plus généralement que le résultat de cette décomposition opérée par un moyen quelconque, est toujours identiquement le même. Pour le démontrer, supposons qu'on ait décomposé la fraction par deux moyens différents, et qu'on ait trouvé :

$$E + \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \cdots\cdots + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \cdots\cdots$$

$$\text{et } E' + \frac{A'}{(x-a')^{\alpha'}} + \cdots\cdots + \frac{B'}{(x-b')^{\beta'}} + \cdots\cdots$$

Ces deux quantités seront évidemment égales en x, mais je dis de plus qu'elles sont identiques, termes à termes. En effet, on a :

$$E + \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \cdots\ \&c^a \quad = E' + \frac{A'}{(x-a')^{\alpha'}} + \&c^a\ldots$$

Je multiplie les deux membres par $(x-a)^\alpha$. Tous les termes du premier membre, excepté A contiennent $x-a$. Donc pour $x=a$, le premier membre se réduit à A. Donc le second membre doit contenir $x-a$; sans quoi, pour $x=a$, on aurait $A=0$ ce qui est absurde ainsi qu'on l'a fait voir. Le second membre devant contenir $x-a$:

Soit $x-a = x-a'$. d'où $a=a'$

On fera voir de la même manière que $b=b'$ &c^a. et on fera voir aussi que réciproquement tous les facteurs du second membre se trouvent dans le premier,

de sorte que ce sont les mêmes facteurs qui se trouvent de part et d'autre.

Je dis maintenant que $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$ &a. Supposons en effet $\alpha>\alpha'$. En multipliant les deux membres par $(x-a)^{\alpha}$, et faisant $x=a$, on aurait $A=0$, ce qui est absurde, puisqu'on suppose que $\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}$ est le premier terme de ceux qui contiennent $x-a$ en dénominateur. Donc $\alpha=\alpha'$. Donc aussi $A=A'$ car ce sont là les valeurs des deux membres pour $x=a$.

Si le numérateur suivant A_1 était nul, on démontrerait que le numérateur correspondant dans le second membre est nul aussi, et on passerait au premier numérateur qui n'est pas nul. On démontrera ainsi que toutes les parties fractionnaires des deux membres sont égales deux à deux. Donc les parties entières sont aussi égales entre elles.

Donc enfin il n'y a qu'une seule manière de décomposer la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ en fractions simples.

Il faut maintenant déterminer E, A, A_1 &a.
Pour cela je divise $f(x)$ par $F(x)$. Soit
$\frac{f(x)}{F(x)}=Q+\frac{S}{F(x)}$. Or, si on représente par T la somme des fonctions simples dans lesquelles on a décomposé la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$; on aura.

$\frac{f(x)}{F(x)}=E+T$. Donc :

$$Q + \frac{S}{F(x)} = E + T$$

$$\text{d'où } E - Q = \frac{S}{F(x)} - T.$$

La quantité S est un polynome de degré en x moindre que $F(x)$. Donc si l'on fait croître x indéfiniment, le second membre tend vers zéro. Donc le premier membre est nul aussi. Donc $E = Q$. Car s'il existait une différence entre Q et E, cette différence resterait la même pour toute valeur d'x, si elle était constante ; et deviendrait infinie pour $x = \infty$, si elle était un polynome en x.

La partie E se trouvera donc facilement au moyen d'une division ; pour trouver les numérateurs des parties simples, on peut supposer que cette partie entière E a été séparée. Pour plus de généralité, nous la conserverons.

On a donc :

$$\frac{f(x)}{F(x)} = E + \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \&a + \dots + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \&a \dots$$

Multiplions par $(x-a)^\alpha$ on aura :

$$\frac{f(x)}{F_1(x)} = A + A_1(x-a) + \dots + A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1} + (x-a)^\alpha . H$$

H étant la somme de tous les termes qui ne contiennent en dénominateur aucun facteur égal à $x-a$.

Posons $x = a + h$, nous aurons :

$$\frac{f(a+h)}{F_1(a+h)} = A + A_1 h + A_2 h^2 + \cdots + A_{\alpha-1} h^{\alpha-1} + h^{\alpha}. H.$$

Soit $\frac{f(x)}{F_1(x)} = \mathcal{F}(x)$; alors, d'après la série de Taylor

$$\mathcal{F}(a+h) = \frac{f(a+h)}{F_1(a+h)} = \mathcal{F}(a) + \frac{h}{1}\mathcal{F}'(a) + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{h^{\alpha-1}}{1.2.(\alpha-1)}\mathcal{F}^{\alpha-1}(a) + \frac{h^{\alpha}}{1.2..\alpha}\mathcal{F}^{\alpha}(a+\theta h).$$

Si on compare les deux développements de $\mathcal{F}(a+h)$, on aura, en faisant $h=0$, $A = \mathcal{F}(a)$. En divisant ensuite par h on aura :

$$A_1 + A_2 h + \cdots = \mathcal{F}'(a) + \frac{h}{1.2}\mathcal{F}''(a) + \cdots\cdots$$

Et si on fait encore $h=0$, on aura $A_1 = \mathcal{F}'(a)$ et ainsi de suite. Enfin :

$$A_{\alpha-1} = \frac{\mathcal{F}^{\alpha-1}(a)}{1.2..(\alpha-1)}.$$

On a ainsi des formules qui donnent les numérateurs cherchés; mais dans la méthode il sera plus commode de se servir de la méthode des coefficients indéterminés.

Dans le cas où $\alpha = \beta = \ldots = 1$, c'est-à-dire dans le cas où le polynome $F(x)$ n'a que des facteurs simples; on a

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{D}{x-d}$$

et on a $F(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-d)$

par suite :

$$\frac{f(x)}{(x-b)\cdots(x-d)} = A + (x-a)\left\{\frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{D}{x-d}\right\}$$

Si on fait $x = a$, on aura :

$$A = \frac{f(a)}{(a-b)\cdots(a-d)} \text{ de même}$$

$$B = \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)\cdots(b-d)} \text{ et ainsi de suite.}$$

Mais $F'(x) = (x-b)\cdots(x-d) + (x-a)\cdots(x-d) + \text{etc.}$
donc $F'(a) = (a-b)(a-c)\cdots(a-d)$

$$\text{donc } A = \frac{f(a)}{F'(a)}, \text{ de même } B = \frac{f(b)}{F'(b)}.$$

Des formules simples qui précèdent, il résulte ce théorème remarquable.

Supposons que la différence des degrés de $f(x)$ et de $F(x)$ soit égale à l'unité, et que l'on ait :

$$f(x) = gx^{n-1} + \&c.$$
$$\text{et} \quad F(x) = x^n + \&c.$$

alors on a :

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(a)}{(x-a)F'(a)} + \text{etc.}$$

Faisons croître x indéfiniment, après avoir multiplié par x ; alors :

$x f(x)$ tend vers g, et on a :

$$g = \frac{f(a)}{F'(a)} + \frac{f(b)}{F'(b)} + \text{etc.}$$

On a vu qu'on ne faisait aucune distinction des racines réelles et des racines imaginaires de l'equation $F(x)$, la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ peut se décomposer en fractions simples, c'est-à-dire en fractions dont les numérateurs sont constants, et dont les dénominateurs sont les différents diviseurs de $F(x)$ correspondant à une même racine. Ainsi.

$$\frac{f(x)}{F(x)} = E + \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \text{etc.} \quad + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$

$$+ \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \text{etc.}$$

Et on sait déterminer E, A, A_1, etc.; et pour cette détermination, la méthode des coefficients indéterminés, qui est en général la plus commode, est appliquable; car on a démontré que la décomposition est toujours possible.

Supposons maintenant que $F(x)=0$ ait des racines imaginaires, $F(x)$ étant toujours un polynome rationnel; on peut se proposer de décomposer $\frac{f(x)}{F(x)}$ de manière qu'il n'y ait pas de quantités imaginaires dans le second membre.

Pour celà, remarquons que si $F(x)=0$ admet une racine imaginaire $h+k\sqrt{-1}$, elle admet aussi pour racine la quantité imaginaire conjuguée $h-k\sqrt{-1}$ et que si α est le degré de multiplicité de la première, il est aussi le degré de multiplicité de la seconde. Supposons donc que les racines a et b soient

conjuguées. Les numérateurs correspondants savoir

$$A,\ A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_{\alpha-1},\ B\ \&^{a},\ B_{\beta-1}$$

sont déterminés ainsi qu'on l'a vu par les formules :

$$A=\mathcal{F}(a),\ \ A_1=\mathcal{F}'(a)\ \&^{ca}.\ A_{\alpha-1}=\mathcal{F}^{\alpha-1}(a)$$

$$B=\mathcal{F}(b),\ \ B_1=\mathcal{F}'(b)\ \&^{ca}\ \ B_{\beta-1}=\mathcal{F}^{\beta-1}(b)$$

en supposant que $\mathcal{F}(x)=\dfrac{f(x)}{F_1(x)}$.

Or, puisque a et b sont des quantités imaginaires conjugées, $\mathcal{F}(a)$ et $\mathcal{F}(b)$ sont aussi des quantités imaginaires conjuguées. Si donc $A=G+H\sqrt{-1}$. On aura $B=G-H\sqrt{-1}$. De même on aura :

$$A_1=G_1+H_1\sqrt{-1},$$
$$B_1=G_1-H_1\sqrt{-1},\quad \&^{ca}.$$

Considérons donc l'ensemble des fractions simples qui correspondent aux racines $h+k\sqrt{-1}$, et $h-K\sqrt{-1}$.

$$\frac{G+H\sqrt{-1}}{(x-h-k\sqrt{-1})^{\alpha}}+\frac{G_1+H_1\sqrt{-1}}{(x-h-k\sqrt{-1})^{\alpha-1}}+\&^{ca}.$$

$$+\frac{G-H\sqrt{-1}}{(x-h+k\sqrt{-1})^{\alpha}}+\frac{G_1-H_1\sqrt{-1}}{(x-h+k\sqrt{-1})^{\alpha-1}}+\&^{ca}.$$

Ces deux groupes de termes peuvent être réunis en un seul de manière à faire disparaître les imaginaires. En effet, réduisons-les tous au même dénominateur ; alors leur somme pourra s'écrire :

$$\frac{P}{\left[(x-h)^2+k^2\right]^{\alpha}}$$

P est un polynome en x, d'un degré en x moindre que le dénominateur. En effet quand on fait croître x indéfiniment, chacune des fonctions simples tend vers zéro ; donc il doit en être de même de leur somme ; d'ailleurs ce polynome P est réel, ainsi que le dénominateur. Posons $x - h = z$, alors P sera un certain polynôme en z. Mettons en évidence les termes de degré pair et les termes de degré impair :

$$P = M(z^2) + zN(z^2).$$

Alors la somme des fonctions simples que nous considérons sera :

$$\frac{M(z^2)+zN(z^2)}{\left[(x-h)^2+k^2\right]^\alpha} = \frac{M(z^2)+zN(z^2)}{(z^2+k^2)^\alpha}$$

$$= \frac{M(z^2)}{(z^2+k^2)^\alpha} + \frac{zN(z^2)}{(z^2+k^2)^\alpha}$$

Considérons la fraction rationnelle : $\dfrac{M(t)}{(t+k^2)^\alpha}$

Le numérateur est de degré en t moindre que le dénominateur ; donc si on la décompose en fractions simples, on ne trouvera pas de partie entière ; le dénominateur n'a d'ailleurs qu'une seule racine négative $t = -k^2$

$$\frac{M(t)}{(t+k^2)^\alpha} = \frac{A}{(t+k^2)^\alpha} + \frac{A_1}{(t+k^2)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{t+k^2}$$

De même :

$$\frac{N(t)}{(t+k^2)^\alpha} = \frac{B}{(t+k^2)^\alpha} + \frac{B_1}{(t+k^2)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{B_{\alpha-1}}{t+k^2}$$

Multiplions le second résultat par z, et ajoutons le avec le premier, en remplaçant t par k^2 :

$$\frac{M(z^2)+zN(z^2)}{(z^2+k^2)^\alpha}=\frac{A+Bz}{(z^2+k^2)^\alpha}+\frac{A_1+B_1z}{(z^2+k^2)^{\alpha-1}}+\&c^a.$$

ou bien, en remplaçant z par $x-h$,

$$\frac{P}{\left[(x-h)^2+k^2\right]^\alpha}=\frac{Bx+A-Bh}{\left[(x-h)^2+k^2\right]^\alpha}+\frac{B_1+A_1-B_1h}{\left[(x-h)^2+k^2\right]^{\alpha-1}}+\&c^a.$$

On fera de même pour deux autres racines imaginaires conjuguées, et ainsi de suite. On aura donc décomposé la fraction proposée en fractions simples savoir, pour les racines réelles en fractions à numérateur constant, et pour les racines imaginaires à numérateur du premier degré en x.

On peut se demander s'il y a plusieurs manières d'opérer la décomposition, ou si les résultats obtenus par des procédés quelconques sont égaux entre eux, ou plutôt identiques. Soient donc les deux résultats :

$$\left.\begin{aligned}&E+\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\&c^a\\&+\cdots\cdots\\&+\frac{Bx+C}{\left[(x-h)^2+k^2\right]^\beta}+\cdots\end{aligned}\right\}\text{ et }\left\{\begin{aligned}&E'+\frac{A'}{(x-a')^{\alpha'}}\cdot\&c^a\\&+\cdots\cdots\\&+\frac{B'x+C'}{\left[(x-h')^2+k'^2\right]^{\beta'}}.\end{aligned}\right.$$

D'abord l'égalité $E=E'$ se déduit de ce que la différence $E-E'$ tend vers zéro quand x croît indéfiniment. Or cette différence ne peut être qu'une constante ou un polynome ; dans ce dernier cas quand x

devient infini, elle devient elle-même infinie; dans le second elle ne peut tendre vers zéro quand x varie. Donc cette différence est nulle.

Si la racine a est réelle, on démontrera, ainsi qu'il a été fait que $A = A'$, $a = a'$; $\alpha = \alpha'$ &ca.

Considérons donc une fonction simple ayant en dénominateur un facteur réel du second degré.
$\left[(x-h)^2 + K^2\right]^\beta$.

Je suppose que le dénominateur se trouve dans le premier résultat; ensorte que par hypothèse, B et C ne sont pas nuls simultanément.

Je multiplie tout par $\left[(x-h)^2 + K^2\right]^\beta$, et je fais $x = h \pm K\sqrt{-1}$. Le premier résultat devient $Bx + C$. Quant au second, si aucune de ses fractions simples ne contient en dénominateur le facteur du second degré que nous considérons, il se réduira à zéro. Donc l'équation $Bx + C = 0$ devrait être vérifiée quand on remplace x par $h \pm K\sqrt{-1}$, c'est-à-dire qu'elle aurait deux racines, ce qui est absurde, à moins que l'on ait $B = 0$ et $C = 0$, ce qui est contre l'hypothèse. Donc le second membre contient ce facteur du second degré.

Soit, par exemple, $h = h'$; $K = K'$. Je dis que $\beta = \beta'$. En effet. Soit $\beta > \beta'$. Je multiplie tout par: $\left[(x-h)^2 + K^2\right]^\beta$. Alors si je fais $x = h \pm K\sqrt{-1}$, j'obtiens d'une part $Bx + C$, et de l'autre zéro, Résultat absurde ainsi qu'on vient de le voir. On fera

voir de la même manière qu'on ne peut pas supposer $\beta' > \beta$. Donc $\beta = \beta'$.

Je dis maintenant que $B = B'$ et $C = C'$. En effet multiplions encore par $\left[(x-h)^2 + k^2\right]^\beta$ et faisons $x = h \pm k\sqrt{-1}$, on a :

$$Bx + C = B'x + C' \quad \text{d'où}$$

$(B - B')x + C - C' = 0$. Équation du premier degré qui aurait deux racines, ce qui est absurde à moins que $B - B' = 0$ $C - C' = 0$.

Il y a donc identité entre les termes deux à deux, des deux résultats. Donc la décomposition n'est possible que d'une seule manière.

On a vu qu'une quantité imaginaire a une infinité de logarithmes. On peut se demander si la règle de différentiation pour ces sortes de logarithmes est la même que pour les logarithmes ordinaires.

Soit donc $z = \log. u$, u étant de la forme $v + w\sqrt{-1}$. Alors on a : $e^z = u$. Or, quelque soit z on sait différentier e^z, savoir, $e^z dz = du$.

d'où dz ou $d\log. u = \dfrac{du}{e^z} = \dfrac{du}{u}$.

Donc la règle de différentiation reste la même que pour les logarithmes ordinaires.

Détermination des vraies valeurs des fractions qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$.

Soit une fraction $\dfrac{f(x)}{F(x)}$; pour une valeur donnée de x ; cette fraction a en général une

valeur déterminée ; mais il peut arriver que pour une valeur $x=a$, on ait $f(a)=0$ et $F(a)=0$. La valeur de la fraction se présente sous une forme indéterminée ; mais il arrive le plus souvent que cette fraction est une fonction continue d'x, en sorte que quand x tend vers la valeur a elle tend elle même vers une certaine valeur A. C'est cette valeur limite qu'on appelle la vraie valeur de la fraction pour $x=a$; c'est cette vraie valeur qu'il s'agit de trouver.

Pour cela, je pose $x=a+h$, h étant une variable qu'on fera tendre vers zéro. Considérons donc $\dfrac{f(a+h)}{F(a+h)}$. On aura, d'après la formule de Taylor bornée à ses deux premiers termes :

$$f(a+h)=f(a)+h\left\{f'(a)+\varepsilon\right\}$$

ε étant égal à $\varepsilon=f'(a+h)-f'(a)$.

Cette formule suppose la continuité de $f'(x)$ et de $f(x)$ dans un intervalle aussi petit qu'on voudra aux environs de la valeur $x=a$, de même

$$F(a+h)=F(a)+h\left\{F'(a)+\eta\right\}$$

Or par hypothèse, $f(a)=0$ et $F(a)=0$.

Donc (1) $\dfrac{f(a+h)}{F(a+h)}=\dfrac{f'(a)+\varepsilon}{F'(a)+\eta}$.

Si l'on fait tendre h vers zéro, ε et η tendent vers zéro.

Donc $\dfrac{f(a)}{F(a)}=\dfrac{f'(a)}{F'(a)}$.

Si maintenant $f'(a)$ et $F'(a)$ sont différents de zéro, la vraie valeur cherchée est trouvée. Si $f'(a)$ est nul, sans que $F'(a)$ le soit, la formule précédente donne zéro pour résultat ; et ce résultat est exact. Car si on se reporte à l'équation (1), on voit qu'en faisant tendre h vers zéro ; le numérateur tend vers zéro, tandis que le dénominateur tend vers $F'(a)$ qui n'est pas nul.

De même si $F'(a)$ est nul sans que $f'(a)$ le soit, cette même formule donne l'infini pour vraie valeur de la fraction ; et ce résultat est encore exact, ainsi qu'on le reconnaît sur l'équation (1).

Mais si $f'(a)$ et $F'(a)$ sont nuls simultanément, l'équation (1) fait voir que quand on fait diminuer h indéfiniment, le numérateur et le dénominateur tendent l'un et l'autre vers zéro, en sorte qu'on ne sait rien sur la vraie valeur de la fraction.

Alors, au lieu de borner la série de Taylor à ses deux premiers termes, on en prendra les trois premiers

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}\left\{f''(a)+\varepsilon\right\}$$

$$F(a+h)=F(a)+\frac{h}{1}F'(a)+\frac{h^2}{1.2}\left\{F''(a)+\eta\right\}$$

ε et η ayant des valeurs analogues à celles qu'elles avaient précédemment, et $f''(x)$ étant d'ailleurs supposé, ainsi que $F''(x)$, continue pour les valeurs d'x voisines de a. Or par hypothèse :

$$f(a)=0 \quad f'(a)=0 \quad F(a)=0 \quad F'(a)=0.$$

Donc :

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f''(a)+\varepsilon}{F''(a)+\eta}.$$

Faisons $h=0$. alors on a:

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f''(a)}{F''(a)}.$$

Si $\frac{f''(a)}{F''(a)}$ a une valeur nulle, finie, ou infinie, la valeur de la fraction $\frac{f(a)}{F(a)}$ est trouvée. Si, au contraire, $\frac{f''(a)}{F''(a)}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, on poussera le développement de la série de Taylor à un terme de plus, et ainsi de suite. On voit que la règle se résume en ceci. Il faut prendre la dérivée du numérateur et du dénominateur jusqu'à ce qu'on en trouve deux du même ordre qui ne soient pas nulles simultanément; on y remplacera x par a, et le rapport des résultats sera la vraie valeur cherchée. Cette règle suppose toujours que les fonctions dont on se sert, ne sont pas infinies pour $x=a$, et suppose de plus la continuité des fonctions auxquelles on s'arrête pour les valeurs d'x voisines de a.

Supposons, plus généralement, que par un moyen quelconque, on ait développé $f(a+h)$ et $F(a+h)$ suivant les puissances ascendantes de h, savoir:

$$f(a+h) = Ah^{\alpha} + A'h^{\alpha+\alpha'} + \&c^a.$$

$$F(a+h) = Bh^{\beta} + B'h^{\beta+\beta'} + \&c^a.$$

α et β doivent être supposés positifs, car pour $h=0$,

on doit avoir $f(\alpha)$ et $F(\alpha)$, qui par hypothèse, ne sont infinis, et ils le seraient si h était en dénominateur.
On déduit delà

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{Ah^{\alpha} + A'h^{\alpha+\alpha'} + \&c \ldots + \ldots}{Bh^{\beta} + B'h^{\beta+\beta'} + \ldots \&c \ldots}$$

Il peut arriver trois cas, savoir :
$\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha < \beta$.
Si $\alpha = \beta$: divisons les deux termes de la fraction par h^{α}. Alors

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{A + A'h^{\alpha'} + \&c}{B + B'h^{\beta'} + \&c}$$

Si on fait $h=0$. alors $\dfrac{f(\alpha)}{F(\alpha)} = \dfrac{A}{B}$,

Car le développement étant supposé relatif aux puissances ascendantes d'h, tous les termes qui contiennent h s'annulent pour $h=0$.
Si $\alpha > \beta$, je divise par h^{β}, et alors,

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{Ah^{\alpha-\beta} + A'h^{\alpha+\alpha'-\beta} + \ldots \&c}{B + B'h^{\beta'}}$$

$\alpha-\beta$ est >0 par hypothèse. Donc si on fait $h=0$

$$\frac{f(\alpha)}{F(\alpha)} = 0.$$

Si enfin, on a $\alpha < \beta$, je divise par h^{α}, et

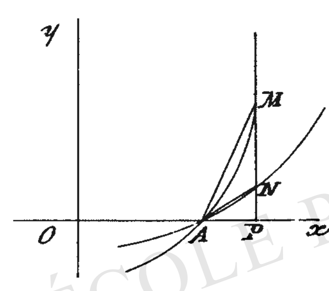
$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{A + A'h^{\alpha'} + \&c}{Bh^{\beta-\alpha} + B'h^{\beta+\beta'-\alpha} + \&c.}$$

$\beta-\alpha$ est >0 par hypothèse. Donc pour $h=0$

$\frac{f(a)}{F(a)} = \infty.$

La première méthode exposée qui donne la règle simple de prendre les dérivées successives des fonctions $f(x)$ et $F(x)$, et de faire $x = a$ dans le rapport de celles du même rang qui ne sont pas nulles simultanément, peut se déduire de ce dernier théorème, on peut aussi arriver à son principe par les considérations géométriques suivantes.

Construisons les courbes représentées par les équations :



$y = f(x)$, $Y = F(x)$.

Soit $OA = a$. Supposons $f(a) = 0$ $F(a) = 0$.

Alors les deux courbes se coupent en un point A situé sur l'axe des x. On demande la vraie valeur de $\frac{f(a)}{F(a)}$. Pour cela, soit $AP = h$, MP une droite parallèle à l'axe des y. On a $NP = f(a+h)$, $MP = F(a+h)$.

Donc $\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{NP}{MP}$. Menons les sécantes AM et AN. alors on a :

$NP = AP\,tg.\,NAP$, $MP = AP\,tg.\,MAP$.

Donc : $\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{tg.\,NAP}{tg\,MAP}$. Or quand h tend vers zéro, les sécantes AM et AN tendent vers les tangentes

aux courbes au point A, et ces tangentes font avec l'axe des x des angles dont les tangentes trigonométriques ont pour expression $f'(\alpha)$ et $F'(\alpha)$.

Donc $\dfrac{f(\alpha)}{F'(\alpha)} = \dfrac{f'(\alpha)}{F'(\alpha)}$.

Supposons que pour $x=\alpha$, on ait $f(x)=\infty$ et $F(x)=\infty$, alors la fonction, $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ se présente sous la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. Proposons nous de trouver sa vraie valeur A. Pour celà, je remarque qu'on a :

$\dfrac{f(x)}{F(x)} = \dfrac{\dfrac{1}{F(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}$. Cette dernière fraction se présente sous la forme $\dfrac{0}{0}$. Par conséquent on aura sa vraie valeur, (pourvu du moins que $f'(\alpha)$ et $F'(\alpha)$ ne soient pas nuls simultanément), en prenant les dérivées du numérateur et du dénominateur, et faisant $x=\alpha$ dans leur rapport.

Donc on a :

$$A = \frac{-\dfrac{F'(\alpha)}{F(\alpha)^2}}{-\dfrac{f'(\alpha)}{f(\alpha)^2}} = \frac{f(\alpha)^2}{F(\alpha)^2} \cdot \frac{F'(\alpha)}{f'(\alpha)} = A^2\,\frac{F'(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Donc si A n'est pas nul, on aura, en divisant par A, $1 = A\dfrac{F'(\alpha)}{f'(\alpha)}$ d'où $A = \dfrac{f'(\alpha)}{F'(\alpha)}$.

Ainsi dans le cas où la vraie valeur cherchée n'est pas nulle, on obtient sa valeur au moyen de la même règle que quand la fraction se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Examinons donc si la même règle subsiste dans le cas où $A = 0$. Considérons pour cela la fonction :

(1) $\dfrac{f(x)}{F(x)} + C$, C étant une constante quelconque. On peut l'écrire :

$$(2)\ \frac{f(x) + CF(x)}{F(x)}.$$

Puisque $A = \dfrac{f(\alpha)}{F(\alpha)} = 0$, par hypothèse, il est clair que la vraie valeur de la fonction (1) pour $x = \alpha$, c'est la constante C, qui n'est pas nulle. Prenons donc la forme (2) et en appliquant la règle démontrée pour ce cas, nous aurons la vraie valeur C.

$$\frac{f'(x) + CF'(x)}{F'(x)} = \frac{f'(x)}{F'(x)} + C$$

Par suite $C = \dfrac{f'(\alpha)}{F'(\alpha)} + C$. Donc $\dfrac{f'(\alpha)}{F'(\alpha)} = 0$.

Donc dans le cas où la vraie valeur cherchée est nulle, on l'obtient encore au moyen de la règle ordinaire.

Dans le cas où cette valeur est infinie, elle est encore donnée par la même règle. En effet, la vraie

valeur de la fraction renversée est alors zéro.

$\frac{F(\alpha)}{f(\alpha)}=0$. Donc C est la vraie valeur de la fonction

$\frac{F(x)}{f(x)}+C=\frac{F(x)+Cf(x)}{f(x)}$. Appliquons la règle à cette fonction dont la vraie valeur n'est pas nulle

$$\frac{F'(x)+Cf'(x)}{f'(x)}=\frac{F'(x)}{f'(x)}+C$$

D'où $C=\frac{F'(\alpha)}{f'(\alpha)}+C$. donc $\frac{F'(\alpha)}{f'(\alpha)}=0$

et par suite $\frac{f'(\alpha)}{F'(\alpha)}=\infty$.

Donc enfin la règle est générale.

Si la fonction se présentait sous la forme : $0\times\infty$, on ramènera facilement ce cas au cas précédent. Car soit $f(\alpha)=0$ et $F(\alpha)=\infty$ alors $f(x)\,F(x)$ se présente sous la forme indiquée. Mais $\frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, et par suite on saura trouver la vraie valeur.

Trouver la vraie valeur de $\frac{1-\cos.x}{x^2}$ pour $x=0$.

Pour cette valeur d'x, $1-\cos.x=0$ $x^2=0$. Je prends les dérivées premières :

$\frac{\sin.x}{2x}$. Pour $x=0$, les deux termes sont encore nuls.

Je prends les dérivées secondes ;

$\frac{\cos. x}{2}$ pour $x = 0$ cette fraction $= \frac{1}{2}$. C'est là la vraie valeur cherchée, et elle résulte immédiatement du développement :

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \&^{a}$$

$$\frac{1 - \cos. x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{1.2.3.4} + \&^{a}.$$ pour $x = 0$ on a $\frac{1}{2}$.

D'ailleurs la règle indiquée équivaut au développement 2. Soit $n\left(\sqrt[n]{b} - 1\right)$. On demande sa vraie valeur pour $n = \infty$. On trouve $\infty \times 0$, on peut l'écrire :

$\frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$ soit $x = \frac{1}{n}$, alors $\frac{b^x - 1}{x}$, Pour $x = 0$ on a la forme $\frac{0}{0}$. Prenons les dérivées : $\frac{b^x \log. b}{1}$. Pour $x = 0$, on a $\log. b$. Donc pour $n = \infty$, on a $n\left(\sqrt[n]{b} - 1\right) = \log. b$.

On arriverait au même résultat par le développement de b^x en série.

3°. On demande la vraie valeur de $x \log. x$ pour $x = 0$. On a $\log. 0 = \infty$. Donc c'est $0 \times \infty$.

Mais on a $x \log. x = \frac{\log. x}{x^{-1}}$. Pour $x = 0$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Prenons les dérivées $\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = -\frac{x^2}{x} = -x$. Quantité nulle pour $x = 0$.

Ainsi on peut dire que les logarithmes des petits nombres sont infiniment petits relativement à ces petits

nombres.

On peut même faire voir qu'ils sont infiniment petits relativement à une puissance quelconque de ces petits nombres.

Car soit $x^m \log. x = \frac{\log. x}{x^{-m}}$.

Dérivées $\frac{\frac{1}{x}}{-mx^{-m-1}} = -\frac{x^m}{m}$. quantité nulle pour $x=0$.

pourvu que m soit > 0.

Considérons maintenant de grands nombres

$\frac{\log. x}{x^m}$ pour $x=\infty$, on a $\frac{\infty}{\infty}$.

Dérivées $\frac{\frac{1}{x}}{mx^{m-1}} = \frac{1}{mx^m}$ pour $x=\infty$. On a pour résultat zéro si m est > 0.

Donc $\log. x$ ne croît pas aussi rapidement qu'une puissance quelconque positive de x.

4°. Soit $\frac{a^x}{x^m}$ avec l'hypothèse $a > 1$. Pour $x=\infty$, cette quantité devient $\frac{\infty}{\infty}$.

Soit $a^x = y$. Alors on aura $x = l_1 y$.

Donc la fonction est $\frac{y}{(Ly)^m} = \left(\frac{y^{\frac{1}{m}}}{Ly}\right)^m$

Or, d'après ce qui précède $y^{\frac{1}{m}}$ est infiniment grand par rapport à Ly. Donc la fonction $\frac{a^x}{x^m}$ est infinie pour $x=\infty$.

Par le développement de a^x, on arrivera au même résultat.

$$\frac{a^x}{x^m} = \frac{1 + \frac{x}{1}\log.a + \cdots\cdots + \frac{x^n}{1.2..n}(\log.a)^n + \&c^a.}{x^m}$$

On peut prendre $n > m$. Alors il est clair que

$$\frac{a^x}{x^m} > \frac{x^{n-m}}{1.2\ldots n}(\log.a)^n.$$

Donc l'expression est infinie pour $x = \infty$.

5. Considérons la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$. Pour $x = 0$. C'est une quantité nulle, divisons-la par x^m, m étant positif.

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} = \frac{1}{x^m e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x^m\left(1 + \frac{1}{x^2} + \&c^a\ldots\right)}$$

Ici nous développons l'exponentielle en série, parce que si l'on prenait les dérivées successives, cette exponentielle reparaîtrait toujours. Or dans la parenthèse du second membre on trouvera toujours un exposant d'x plus grand que m. Soit $2n$ l'exposant de cette puissance d'x. Alors effectuant la multiplication par x^m, on aura en dénominateur le terme :

$$\frac{1}{1.2.\ldots n} \quad \frac{1}{x^{2n-m}}.$$

Donc si on fait abstraction de tous les autres termes, on aura :

$$e^{-\frac{1}{x^2}} < \frac{1}{x^n\left(\frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{1}{x^{2n-m}}\right)}$$

ou $< 1.2\ldots n.\,x^{2n-m}$

A mesure que x tend vers zéro, cette dernière quantité décroît indéfiniment ; donc pour $x = 0$, on a :

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} \text{ ou } e^{-\frac{1}{x^2}}\, x^{-m} = 0.$$

Je dis qu'il résulte de là que la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ a toutes ses dérivées nulles pour $x=0$. En effet, soit :

$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-x^{-2}}$, on aura

$f'(x) = e^{-x^{-2}} . 2x^{-3}$

$f''(x) = e^{-x^{-2}}\, 4x^{-6} + e^{-x^{-2}} . 6x^{-4}$

Etc.

Et ainsi de suite, on trouvera toujours dans chaque dérivée un nombre limité de termes de la forme $e^{-x^{-2}}\, x^{-m}$, m étant > 0.

Il résulte de là que si on voulait développer $e^{-x^{-2}}$ par la série de Maclaurin, on trouvera une suite de termes tous nuls, et par conséquent la série n'a pas pour somme la fonction dans ce cas-là.

De plus, si on développe par la même formule la fonction $F(x) + e^{-x^{-2}}$, on trouvera le même développement que pour $F(x)$. En sorte que le reste de la série, quand on développe $F(x) + e^{-x^{-2}}$ ne tend pas vers zéro, si la série de $F(x)$ est convergente, mais il tend vers la quantité $e^{-x^{-2}}$.

Il résulte de ce qui précède qu'il peut arriver qu'une fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = a$,

et qu'en prenant les dérivées successives du numérateur et du dénominateur on trouve toujours la même forme. On n'aura qu'à prendre deux fonctions du genre de celles que nous venons d'examiner.

Il peut arriver ensuite que la règle, sans donner un résultat inexact, ne donne pas d'une manière précise la valeur de la fraction proposée. En effet soit $\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x}$. Pour $x=0$ on a $\frac{0}{0}$. Or, si on l'écrit $x\sin\frac{1}{x}$, comme $\sin\frac{1}{x}$ est toujours compris entre -1 et $+1$, ce produit est nul pour $x=0$. Maintenant si on applique la règle, on aura:

$$2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos.\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos.\frac{1}{x}.$$

Pour $x=0$, cette quantité est comprise entre -1 et $+1$; il semblerait donc que pour $x=0$, la quantité proposée a une valeur quelconque comprise entre ces deux limites, tandis qu'elle est nulle.

Enfin, il ne faut pas croire que si pour $x=a$, $\frac{f(x)}{F(x)}$ et $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ sont des quantités toutes deux nulles, le rapport de ces quantités soit nécessairement limité. Quand x tend vers a, le rapport de ces quantités peut tendre vers toute autre limite que 1. En effet, soit $\frac{x^2}{x}$. Pour $x=0$ cette quantité est nulle. Appliquons la règle. $\frac{2x}{1}$, quantité nulle pour $x=0$. Ainsi le résultat est exact. Mais pour le rapport de $\frac{x^2}{x}$ à $\frac{2x}{1}$, il

il est $\dfrac{\frac{x^2}{x}}{\frac{2x}{1}} = \dfrac{x^2}{2x} = \dfrac{1}{2}$.

Le rapport des deux quantités nulles est donc $\dfrac{1}{2}$.

La règle de Mr Cauchy qui a été donnée pour trouver la vraie valeur de $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ est fondée sur l'existence même des fonctions dérivées. En effet soit $x = a + h$, h étant une variable que nous ferons tendre vers zéro. Il est clair, puisque $f(a) = 0$ et $F(a) = 0$, que l'on a identiquement :

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}}{\dfrac{F(a+h) - F(a)}{h}}.$$

Cette identité a lieu quelque soit h ; elle est donc vraie aussi pour la limite zéro, des valeurs de h.

Donc $\dfrac{f(a)}{F(a)} = \dfrac{f'(a)}{F'(a)}$.

Si $\dfrac{f'(a)}{F'(a)}$ était de la forme $\frac{0}{0}$, on raisonnerait sur $\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ comme on l'a fait sur la fraction proposée, et on serait conduit à la règle donnée.

Au fond, cette démonstration n'est autre chose que la démonstration géométrique de l'Hopital, présentée sous une forme analytique.

Il y a plus ; on peut facilement former des fractions qui ne contiennent d'autres fonctions que la fonction $f(x)$ qui pour $h=0$ se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, et dont les vraies valeurs pour $h=0$ soient respectivement celles des dérivées du premier, du second, &ca du $n^{ème}$ ordre. Ces fractions sont :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2},$$

$$\frac{f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)}{h^3} \ldots\ldots$$

$$\frac{f(x+nh)-\frac{n}{1}f(x+\overline{n-1}\,h)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}f(x+\overline{n-2}\,h) \text{ etc.}}{h^n}$$

Toutes les fractions pour $h=0$ se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$; pour avoir leurs vraies valeurs, appliquons la règle de Cauchy, en nous rappelant que h est la variable.

$\frac{f'(x+h)}{1}$ et pour $h=0$ on a $f'(x)$.

$$\frac{2f'(x+2h)-2f'(x+h)}{2h} = \frac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h}$$

fraction qui se présente encore sous la forme $\frac{0}{0}$ et à laquelle il faut appliquer de nouveau la règle de Cauchy.

$$\frac{2f''(x+2h)-f''(x+h)}{1}$$

Pour $h=0$ on a pour vraie valeur $f''(x)$, de même

pour les autres.

On pourrait partir de là pour donner une définition des dérivées de l'ordre n dans le cas où n est fractionnaire.

Extension du théorème de Taylor aux fonctions de plusieurs variables.

Considérons d'abord une fonction de deux variables: $f(x,y)$. Donnons à x l'accroissement arbitraire h et à y l'accroissement arbitraire k. Pour développer $f(x+h, y+k)$, considérons $y+k$ comme une quantité constante, et x comme une variable qui reçoit un accroissement h.

$$f(x+h,y+k) = f(x,y+k) + \frac{h}{1} f'_x(x,y+k) + \frac{h^2}{1.2} f'_x(x,y+k) + \dots$$

En bornant la série à ses trois premiers termes.

Maintenant chacun des termes du second membre peut se développer, en considérant x comme constant, et y comme une variable qui reçoit un accroissement k. On aura ainsi:

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k) = f(x,y) &+ \frac{h}{1} f'_x(x,y) + \frac{h^2}{1.2} f''_x(x,y) + \text{le reste.} \\ &+ \frac{k}{1} f'_y(x,y) + \frac{2hk}{1.2} f''_{x,y}(x,y) \\ &+ \frac{k^2}{1.2} f''_y(x,y) + \dots \end{aligned}$$

On pourrait pousser ce développement aussi loin qu'on voudrait, ou plutôt aussi loin que le permettraient les conditions nécessaires pour que la formule de Taylor soit applicable.

Mais cette méthode, qui n'est au fond qu'une application de la formule de Taylor, peut servir à démontrer ce théorème que nous avons invoqué ailleurs, la seconde dérivée prise par rapport à x, puis par rapport à y, est la même que la seconde dérivée prise d'abord par rapport à y puis par rapport à x. Savoir : $f''_{x,y}(x,y) = f''_{y,x}(x,y)$.

En effet supposons que les accroissements K et h soient égaux $K = h$. D'après cela si on regarde d'abord x, puis y comme variables, on a le développement.

$$f(x+h, y+h) = f(x,y) + \frac{h}{1}\left(f'_x(x,y) + f'_y(x,y)\right)$$

$$+ \frac{h^2}{1.2}\left(f''_x(x,y) + 2f''_{x,y}(x,y) + f''_y(x,y)\right) + h^2\eta.$$

Si on suit un ordre inverse, c'est-à-dire si on regarde d'abord y, puis x comme variables, on arrivera nécessairement à un résultat égal ; mais il ne sera pas absolument identique de forme ; on l'obtiendra en changeant x en y, et y en x : savoir

$$f(x+h, y+h) = f(x,y) + \frac{h}{1}\left\{f'_y(x,y) + f'_x(x,y)\right\} + \frac{h^2}{1.2}\left\{f''_y(x,y) + 2f''_{y,x}(x,y) + f''_x(x,y)\right\} + h^2\varepsilon$$

En retranchant membre à membre on aura, en divisant de plus par $\frac{h^2}{1.2}$

$$\varepsilon - \eta = f''_{x,y}(x,y) - f''_{y,x}(x,y)$$

La différence $\varepsilon - \eta$ tend vers zéro quand h tend vers zéro, donc le second membre est constant, et est nul. Donc $f''_{x,y}(x,y) = f''_{y,x}(x,y)$. Ce qu'il fallait démontrer.

Pour opérer le développement, nous considérerons la fonction $f(x+h, y+K)$ comme un cas particulier de la fonction de t $f(x+ht, y+Kt)$, dans laquelle on a fait $t=1$. Cette fonction de t, étant désignée par $\varphi(t)$, on aura en la développant par la formule de Maclaurin :

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{t}{1}\varphi'(0)+\frac{t^2}{1.2}\varphi''(0)+\dots+\frac{t^n}{1.2..n}\varphi^n(0)+R.$$

Le reste R étant égal à $\dfrac{t^n}{1.2..n}\left\{\varphi^n(\theta t)-\varphi^n(0)\right\}$

Faisons maintenant $t=1$, et on aura :

$$f(x+h,y+K)=\varphi(0)+\frac{1}{1}\varphi'(0)+\frac{1}{1.2}\varphi''(0)+\dots+\frac{1}{1.2..n}\varphi^n(0)+R$$

avec $R=\dfrac{1}{1.2..n}\left\{\varphi^n(\theta)-\varphi^n(0)\right\}$

Il s'agit maintenant de former les diverses quantités

$\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$ .... $\varphi^n(0)$ et $\varphi^n(\theta)$.

Pour cela, formons la forme générale de la fonction $\varphi^n(t)$ dans laquelle on fera successivement $n=1,2,3,\dots n$, puis $t=0$ et $t=\theta$.

Posons pour cela $x+ht=u$, $y+Kt=v$ alors $du=hdt$ et $dv=Kdt$.

Ensorte que du et dv sont des constantes, puisque par hypothèse h et K sont des constantes, et que t est la variable indépendante.

Pour avoir $\varphi^n(t)$ je cherche $d^n\varphi(t)$, savoir :

$$d^n\varphi(t)=d^nf(u,v)=\left(\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv\right)^n$$

équation symbolique, qui donne le développement cherché pourvu qu'on change les exposants des puissances de ∂f, en indices de dérivations.

Si l'on met à la place de du et de dv leurs valeurs, on aura :

$$d^n\varphi(t) = dt^n\left(\frac{\partial f}{\partial u}h + \frac{\partial f}{\partial v}K\right)^n,$$

et puisque $dt^n = \text{const}$, on aura :

$$\frac{d^n\varphi(t)}{dt^n} = \varphi^n(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}h + \frac{\partial f}{\partial v}K\right)^n.$$

Dans cette formule la caractéristique f est l'abréviation de $f(u,v)$; c'est ce qui est suffisamment indiqué par les dénominateurs ∂u et ∂v.

Si on fait $t=0$, alors $x=u$, $y=v$ et par suite $f(x,y)=f(u,v)$. Donc si l'on désigne maintenant par f l'abréviation de $f(x,y)$, on aura :

$$\varphi^n(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}K\right)^n.$$

On aura donc :

$$\varphi(0) = f(x,y)$$

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}K,$$

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}hK + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}K^2.$$

Etc. ....

Donc :

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{1}{1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)$$

$$+ \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right.$$

$$+ \text{\&c}a \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{1.2..n}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}h^n + \frac{n}{1}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}h^{n-1}k + \ldots\right)$$

$$+ R.$$

développement ordonné suivant les puissances homogènes de h et de k.

S'il s'agissait d'une fonction de trois, ou d'un plus grand nombre de variables, les raisonnements se feraient d'une manière analogue, et on arriverait à un développement du même genre.

On peut toujours disposer de h et de k, de manière que le reste R soit aussi petit qu'on voudra par rapport au dernier terme du développement.

Soit donc T, ce dernier terme, je dis qu'on peut prendre h et k assez petits pour que $\frac{R}{T}$ soit aussi petit que l'on veut.

En effet on a $R = \frac{1}{1.2..n}\left\{\varphi^n(\theta) - \varphi^n(0)\right\}$

Par suite:

$$\frac{R}{T} = \frac{\varphi^n(\theta) - \varphi^n(0)}{\varphi^n(0)}.$$

Pour démontrer le théorème énoncé, il faut s'appuyer sur les conditions que suppose le développement

en série. Or la base de la démonstration, c'est le développement d'après la série de Maclaurin, de la fonction $\varphi(t)$, on suppose donc que cette fonction et toutes ses dérivées jusqu'à celle de l'ordre n sont continues pour toutes les valeurs de t comprises entre $t=0$, et $t=1$; or on a :

$$\varphi^n(t) = \frac{\partial^n f}{\partial u^n} h^n + \frac{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-1} \partial v} h^{n-1} K + \&c^a.$$

Quand on fait $t=0$, alors $\varphi^n(0)$ a une certaine valeur, et d'après notre hypothèse, on peut donner à t une seconde valeur t' assez voisine de la première pour que $\varphi^n(t')$ diffère de $\varphi^n(0)$ d'aussi peu qu'on voudra. Or, faire varier t depuis 0 jusqu'à 1, c'est faire varier x depuis x jusqu'à $x+h$, et y depuis y jusqu'à $y+K$.

Si donc nous considérons les fonctions dont nous avons parlé comme des fonctions d'x et d'y, les hypothèses faites reviennent à celle-ci : La fonction $f(x,y)$ et toutes ses dérivées, soit par rapport à x, soit par rapport à y, jusqu'à celles de l'ordre n sont finies et continues par rapport à x et à y.

Comme d'ailleurs $\varphi^n(t)$ contient des termes qui sont eux-mêmes des fonctions d'x et d'y, ces termes sont continues par rapport à x et à y. Car il est clair que si un de ces termes passait brusquement d'une valeur à une autre, la fonction $\varphi^n(t)$ ne saurait être continuée. Donc si on désigne par A, B &c^a ce que deviennent les différentes dérivées de $f(x,y)$ quand y remplace t par zéro, on aura

$$\varphi^n(0) = A h^n + B h^{n-1} K + \&c^a \ldots\ldots$$

et par A', B', ce que deviennent ces mêmes dérivées quand on y fait $t=\theta$.

$\varphi^n(\theta)=A'h^n+B'h^{n-1}k+\&^{ra}$... Il résulte des raisonnements précédents que les différences :

$A'-A$, $B'-B$, &ra peuvent être rendues aussi petites qu'on voudra :

On aura donc :

$$\frac{R}{T}=\frac{\varphi^n(\theta)-\varphi^n(0)}{\varphi^n(0)}=\frac{(A'-A)\,h^n+(B'-B)\,h^{n-1}k+\&^{ra}}{Ah^n+Bh^{n-1}k+\&^{ra}.}$$

Soit $h=\alpha\mu$, $k=\beta\mu$, d'où $\dfrac{h}{k}=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Pour faire varier h et k jusqu'à zéro, α et β restant constants, il suffira de faire varier μ jusqu'à zéro. Puisqu'au numérateur et au dénominateur on a des polynômes homogènes en h et k, μ^n disparaîtra et on aura :

$$\frac{R}{T}=\frac{(A'-A)\alpha^n+(B'-B)\alpha^{n-1}\beta+\&^{ra}.}{A\alpha^n+B\alpha^{n-1}\beta+\&^{ra}..}$$

Le dénominateur reste fixe quand on fait décroître μ, le numérateur tend vers zéro. Donc enfin, quand T n'est pas nul, on peut rendre $\dfrac{R}{T}$ aussi petit qu'on voudra.

On aura de même une formule analogue à celle de Maclaurin, en faisant $x=0$, et $y=0$ en remplaçant h et k par x et y.

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{1}(ax+a'y)+\frac{1}{1.2}(bx^2+2b'xy+b''y^2)+\&c.$$
$$+\frac{1}{1.2..n}\left(gx^n+\frac{n}{1}g'x^{n-1}y+\text{etc.}\right)+R$$

Il résulte de là et du théorème qui vient d'être démontré que si $\frac{x}{y}$ n'annulle pas le dernier terme T, on pourra prendre x et y assez petits pour que le rapport du reste au dernier terme soit aussi petit qu'on veut.

De même pour un plus grand nombre de variables.

Soit $f(x,y)$ une fonction homogène d'x et d'y du degré m.

On aura par définition :

$$f(tx,ty)=t^m f(x,y).$$

Au lieu de remplacer x par tx, et y par ty, remplaçons les par $x(1+t)$ et par $y(1+t)$. Alors on aura aussi par définition :

$$f(x+tx,\ y+ty)=(1+t)^m f(x,y)$$

On peut développer le premier membre par la formule de Taylor, et le second par la formule du binôme ; par suite, les coefficients des puissances semblables de t devant être égaux entre elles, on aura autant d'équations que ces développements contiennent de termes.

Le premier membre est :

$$f(x,y)+\frac{t}{1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y\right)+\text{etc.}$$

Le second :

$$f(x,y)+\frac{m}{1}tf(x,y)+\text{etc.}$$

Donc $f(x,y)=f(x,y)$, en faisant $t=1$ et

et $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=mf$

Ce qui donne l'énoncé ordinaire du théorème des fonctions homogènes.

Maxima et minima des fonctions d'une seule variable.

Une fonction d'une seule variable $f(x)$ est dite maximum pour une valeur $\underline{a}$ de $\underline{x}$, toutes les fois que, $\underline{x}$ variant aux environs de $\underline{a}$ dans des limites aussi resserrées qu'on voudra, la valeur de $f(x)$ reste toujours inférieure à $f(\alpha)$.

On dit au contraire que pour une valeur $\underline{a}$ de $\underline{x}$ la fonction $f(x)$ est minimum, lorsque, dans les mêmes circonstances, $f(x)$ est constamment supérieure à $f(\alpha)$.

Il résulte immédiatement de ces définitions que : La condition nécessaire et suffisante pour qu'une valeur $\underline{a}$ de $\underline{x}$ rende $f(x)$ maximum ou minimum, c'est que, pour des valeurs suffisamment petites de $\underline{h}$
$f(\alpha+h)-f(\alpha)$ et $f(\alpha-h)-f(\alpha)$ aient le même signe, $(-)$ si $f(\alpha)$ est un maximum $(+)$ si $f(\alpha)$ est un minimum.

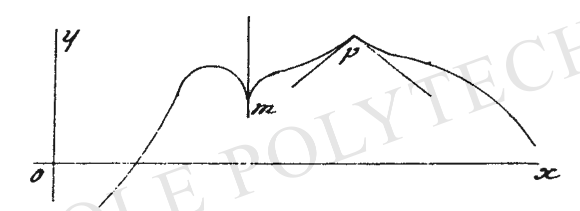
Deux méthodes distinctes sont employées pour déterminer les valeurs de $\underline{x}$ auxquelles correspondent des maxima ou des minima d'une fonction $f(x)$.

La première repose sur le développement de $f(x\pm h)$ par la série de Taylor, et suppose par suite que la fonction et un certain nombre de ses dérivées soient continues aux environs des valeurs cherchées comme nous le verrons plus loin.

La seconde ne préjuge absolument rien la continuité de la fonction elle même.

Nous allons les exposer successivement.

Auparavant toutefois, nous ferons observer que pour qu'une valeur $\underline{a}$ rende maximum ou minimum, une fonction $f(x)$ de $\underline{x}$. Il n'est pas nécessaire qu'aux environs de cette valeur $\underline{a}$ la fonction soit finie et continue. Ce résultat devient tout-à fait évident par la construction de la courbe que représenterait l'équation $y = f(x)$. Rien n'empêche, en effet, que la courbe n'ait la forme ci dessous.



Or, il est bien évident que le point m est un minimum quoique cependant pour ce point $f'(x)$ soit infinie et que le point p est un maximum, quoique pour ce point la fonction $f'(x)$ soit discontinue.

Première méthode. Développons $f(x \pm h)$ par la série de Taylor, il vient :

$$f(x \pm h) = f(x) \pm h \left[f'(x) + \varepsilon_1\right]$$

d'où

$$f(x \pm h) - f(x) = \pm h \left[f'(x) + \varepsilon_1\right] \quad (1)$$

Toute valeur de x à laquelle correspond un maximum ou un minimum de $f(x)$ doit être telle que

$$f(x+h) - f(x) \quad \text{et} \quad f(x-h) - f(x).$$

soient de même signe pour des valeurs suffisamment

petites de h, et d'ailleurs on peut prendre h assez petit pour que $f(x)+\varepsilon_1$ reçoive le signe de $f'(x)$ quantité indépendante de h, donc toute valeur convenable de x doit annuler $f'(x)$. La réciproque peut ne pas être vraie.

Cela étant, considérons une valeur x racine de $f'(x)=0$ et voyons comment on reconnaîtra, si l'état correspondant de la fonction est un minimum ou un maximum, ou ici l'un où l'autre. Pour cela remarquons que dans cette hypothèse,

$$f(x_1 \pm h)-f(x)=\frac{h^2}{1\cdot 2}\left[f''(x_1)+\varepsilon_2\right] \quad (2).$$

On peut toujours supposer h assez petit pour que $f''(x_1)+\varepsilon_2$ prenne le signe $f''(x_1)$; par conséquent si $f''(x_1)<0$, $f(x_1)$ sera un maximum.
Si $f''(x_1)>0$, $f(x_1)$ sera un minimum.

Mais il peut arriver encore que $f''(x)$ soit nul. Dans ce cas on écrira :

$$f(x_1 \pm h)-f(x_1)=\pm\frac{h^3}{1.2\cdot 3}\left[f'''(x_1)+\varepsilon_3\right]$$

Des raisonnemens analogues à ceux auxquels a donné lieu l'équation (1), nous conduisent à déduire de celle-ci les conséquences suivantes :

Si $f'''(x_1)\gtrless 0$, il y a ici maximum ou minimum correspondant à la valeur $x=x_1$.

Si $f'''(x_1)=0$; il pourra y en avoir.

Alors pour distinguer s'il y a maximum ou minimum on remontera à la série de Taylor qui donnera :

$$f(x_1 \pm h)-f(x)=\frac{h^4}{1.2.3.4}\left[f^{IV}(x_1)+\varepsilon_4\right],$$

de laquelle on conclura comme il a été fait pour l'égalité (2) :

si $f^{IV}(x_1) < 0$, $f(x_1)$ est un maximum

si $f^{IV}(x_1) > 0$, $f(x_1)$ est un minimum.

Il pourrait arriver ici encore que l'on eut $f^{IV}(x_1) = 0$. Mais des raisonnemens analogues étant continués sur les dérivées des ordres supérieurs au 4° de la fonction $f(x)$, on arrivera à la règle suivante :

Pour qu'une valeur $x = x_1$ rende maximum ou minimum une fonction dont les dérivées sont continues pour des valeurs de x voisines de x_1. Il faut et il suffit qu'elle annule un nombre impair de dérivées de la fonction à partir de la première; elle correspond à un maximum ou un minimum selon qu'elle rend la dérivée suivante négative ou positive.

Cette méthode, bien simple dans les applications a le malheur de n'être pas générale, comme nous venons de le voir. Elle exclut en effet le cas où la fonction où quelqu'une de ses dérivées sont discontinue aux environs de la valeur convenable, ou recevoir des valeurs correspondantes infinies, puisque dans ce cas la série de Taylor peut n'être pas applicable autant qu'il le faudrait pour opérer comme précédemment.

Seconde méthode. Le principe de cette seconde méthode a été démontré au commencement de ce cours. Je le rappelle brièvement.

Si une fonction est croissante, quand sa variable varie entre deux limites a et b, pour toutes les valeurs de x comprises entre ces deux limites sa dérivée est positive.

Si une fonction est décroissante, et quand sa variable varie entre deux limites $\underline{a}$ et $\underline{b}$, pour toutes les valeurs de $\underline{x}$ comprises entre ces deux limites, sa dérivée est négative.

Ceci posé, soit $\underline{x_1}$ une valeur de x à laquelle répond un maximum ou un minimum de $f(x)$,

$f(x_1+h)-f(x_1)$ et $f(x_1-h)-f(x_1)$

devront être de même signe.

Pour fixer les idées supposons que ce signe soit (+); alors pour deux valeurs comprises entre $\underline{x_1}-\underline{h}$ et $\underline{x_1}$ $f(x)$ sera décroissante et par suite $f'(x)$ sera négative. De même pour des valeurs comprises entre x_1 et x_1+h $f(x)$ sera croissante et par suite $f(x)$ positive, quelque petit que $\underline{h}$ puisse être.

Il résulte de là que la valeur $\underline{x_1}$ sera celle pour laquelle la fonction $f'(x)$ passe du négatif au positif. En supposant que le signe commun aux différences fut le signe $(-)$ on serait arrivé à des conséquences tout-à-fait analogues. Donc toute valeur de $\underline{x}$ qui rendra $f(x)$ maximum ou minimum sera une valeur pour laquelle $f'(x)$ change de signe.

La réciproque est vraie.

Soit en effet $\underline{x_1}$ une valeur pour laquelle $f'(x)$ change de signe, et supposons que ce changement se fasse par le passage du négatif au positif, nous aurons :

$$f'(x_1-h)<0 \quad \text{et} \quad f'(x_1+h)>0.$$

d'où nous concluons que $\underline{x_1}$ varie de $\underline{x_1}-\underline{h}$ à $\underline{x_1}$ $f(x)$ est décroissante et par suite diminue, et quand $\underline{x}$ variant au contraire de $\underline{x_1}$ à $\underline{x_1}+\underline{h}$, $f(x)$ est

croissante et par suite augmente ; ces conclusions étant vraies quelque petit que puisse être h. Il est bien évident que $f(x_1)$ sera un minimum de $f(x)$.

On verrait d'une manière analogue que si le changement de signe de $f'(x)$ se faisait par le passage du positif au négatif, $f(x_1)$ serait un maximum de $f(x)$.

Ces résultats sont importants à retenir car la méthode qui nous occupe n'est que leur application. Nous allons facilement nous en convaincre en l'exposant dans le cas où non seulement le facteur mais encore un certain nombre de ses dérivées sont continuée.

Dans cette hypothèse, il est bien clair que toute valeur convenable de x doit annuler $f'(x)$.

Admettons que x_1 soit une valeur convenable et voyons à distinguer si $f(x_1)$ est maximum ou minimum.

Si $f''(x_1)>0$, $f'(x)$ est croissante pour des valeurs de x voisines de x_1 ; mais $f'(x_1)=0$, donc aussi $f'(x_1-h)<0$ et $f'(x_1+h)>0$, donc $f(x_1)$ est un minimum de $f(x)$.

Si $f'(x_1)<0$, $f'(x)$ est décroissante pour des valeurs de x voisines de x_1 ; mais $f'(x_1)=0$, donc aussi $f'(x_1-h)>0$ et $f'(x_1+h)<0$. Donc $f(x_1)$ est un maximum de $f(x)$.

Mais si $f''(x_1)=0$, on ne peut rien dire.

Pour savoir quelque chose revenons à la fonction $f'''(x)$. Deux cas semblent pouvoir se présenter :

1°. $f'''(x_1) \gtrless 0$, 2°. $f'''(x_1)=0$.

Soit $f'''(x_1)>0$; alors $f''(x)$ est croissante pour des valeurs de x voisines de x_1 ; mais $f''(x_1)=0$. Donc $f''(x_1-h)<0$ et $f''(x_1+h)>0$: il en résulte que pour des valeurs de x plus petites que x_1 $f'(x)$ est décroissante et qu'au contraire elle est croissante pour des valeurs plus grandes, de telle sorte que, comme $f'(x_1)=0$, on a :

$$f'(x_1-h)>0 \text{ et } f'(x_1+h)>0.$$

Il suit de là que pour que la valeur $x=x_1$ réduit $f''(x_1)>0$.

Il faudrait que pour des valeurs de x comprises entre x_1-h et x_1+h, il n'y eut pas de changement de signe de la fonction $f'(x)$. Donc l'hypothèse $f'''(x_1)>0$ est inadmissible.

On démontrerait que l'hypothèse $f'''(x_1)<0$ est pareillement impossible.

Nous n'avons donc plus qu'à considérer le cas de $f'''(x_1)=0$

La considération de la fonction $f^{IV}(x_1)$ va encore servir.

Si $f^{IV}(x_1)>0$ c'est que $f'''(x)$ est croissante pour des valeurs de x voisines de x_1 ; mais $f'''(x_1)=0$, Donc, $f'''(x_1-h)<0$ et $f'''(x_1+h)>0$. Cela étant, il est clair que pour deux valeurs de x inférieures à x_1 $f''(x)$ est décroissante et qu'au contraire elle est croissante pour des valeurs de x supérieures à x_1 ; mais $f''(x_1)=0$, donc $f''(x_1-h)>0$ et $f''(x_1+h)>0$. D'après cela, pour des valeurs de x voisines de x_1 $f'(x)$ est croissante et par suite

$f'(x_1-h)<0$ et $f'(x_1+h)>0$ puisque $f'(x_1)=0$.

Par conséquent pour $x = x_1$ $f(x)$ est minimum.

Si on supposait $f^{IV}(x_1) < 0$, on trouverait de la même manière que $f(x_1)$ est maximum.

Maintenant il peut arriver que $f^{IV}(x_1)$ soit nulle. Dans ce cas, des raisonnemens analogues à ceux qui précèdent conduisent à des conséquences semblables. Ceci suffit à montrer la coïncidence des résultats fournis par mes deux méthodes dans les mêmes hypothèses.

Avant de passer outre, nous ferons observer cependant que la seconde a sur la première cet avantage, que toutes les valeurs qu'elle fournit conviennent, tandis que la première peut en donner qui ne satisfassent point. Cette différence notable entre les deux méthodes tient à ce qu'une fonction d'une seule variable peut fort bien passer par zéro sans changer de signe.

Les discussions ci-dessus montrent d'ailleurs que la valeur de la variable qui la rend nulle alors, annule aussi un nombre impair de ses dérivées.

Passons aux applications des principes que nous venons de poser.

Soit $f(x) = x^m.(1-x)^n$.

On demande les valeurs de x pour lesquelles cette fonction est maximum ou minimum. Or,

$$f'(x) = m x^{m-1}(1-x)^n - n x^m (1-x)^{m-1}$$
$$= x^{m-1}(1-x)^{n-1}\left[m(1-x) - nx\right]$$

Donc $x=0$, $x=1$, $x = \frac{m}{m+n}$ sont les racines de $f'(x)=0$.

Pour discuter ces valeurs cherchons $f''(x)$

$$f''(x) = (m-1)\,x^{m-2}(1-x)^{n-1}\left[m(1-x)-nx\right]$$
$$-(n-1)\,x^{m-1}(1-x)^{n-2}\left[m(1-x)-nx\right]$$

$$-(m+n)\,x^{m-1}(1-x)^{n-1}$$

Il en résulte immédiatement :

$$f''(0)=0$$

$$f''(1)=0$$

$$f''\left(\frac{m}{m+n}\right)<0$$

Donc $f\left(\frac{m}{m+n}\right)=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ est un maximum.

Quant aux valeurs $x=0$, $x=1$, examinons les particulièrement.

Et d'abord parlons de la première.

Comme $f(x)=x^m(1-x)^n$, il est bien clair que toutes les dérivées jusqu'à la $(m-1)^e$ devront être annulées par la valeur $x=0$, quand la $(m-1)^e$ sera la dernière jouissant de cette propriété, et que la m^e sera composée de deux parties ; l'une s'évanouissant avec x, l'autre égale à $+m(m-1)(m-2)\ldots 2\cdot 1\,(1-x)^n$.

Donc pour $x=0$, nous aurons :

$f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f''(0)=0,\ \ldots f^{m-1}(0)=0$ et $f^m(0)>0$.

Delà il suit que si m est pair la valeur $x=0$ rendra nulle un nombre impair des dérivées de $f(x)$; elle rend d'ailleurs la dérivée suivante positive. Donc $f(0)$ sera un minimum de $f(x)$. Si au contraire m est impair $f(0)$ ne sera ni maximum ni minimum, car la valeur $x=0$ annulera un nombre pair des dérivées de $f(x)$.

Arrivons à la seconde.

Comme $f(0)=x^m(1-x)^n$, toutes les dérivées jusqu'à la $(n-1)^e$ inclusivement devront être annulées pour la valeur $x=1$, et la n^e sera composée de deux parties, l'une s'évanouissant par suite de l'hypothèse $x=1$, l'autre

égale à $\pm n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot x^m$ suivant que n sera impair ou pair:

Pour $x=1$, nous aurons donc

$f(1)=0$, $f'(1)=0$, $f''(1)$, … $f^{n-1}(1)=0$, et de plus $f^n(1)<0$, si n est impair, et $f^n(1)>0$ si n est pair.

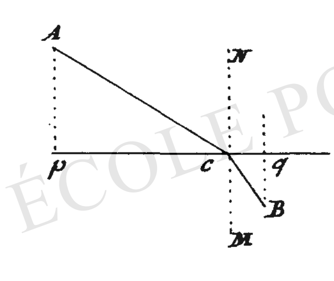
On conclut de là que:

si n est impair, $f(1)$ n'est ni maximum ni minimum,

si n est pair, $f(1)$ est un minimum.

Proposons nous encore, comme application, de résoudre le problème suivant, dû à Fermat.

Deux points A et B sont situés sur deux terrains qui opposent à la marche des difficultés différentes, mais uniforme dans un même terrain; il a eu pour ligne de séparation pq. On demande de trouver la ligne qu'il faudra suivre pour employer en allant de l'un à l'autre le temps minimum.



Il est bien évident à priori qu'il existe un minimum, qu'il n'en saurait exister qu'un et qu'enfin la question ne saurait être susceptible de maximum.

Cela posé, soit c le point où le chemin doit couper pq. Il est clair, puisque la difficulté est uniforme dans un même terrain, que le chemin se composera de deux droites partant du point c aux deux points A, B. et qu'alors la position du point c étant connue, le chemin le sera par une conséquence naturelle. Soient d'ailleurs p et q les projections des points A et B sur pq, v et v' les vitesses de la marche dans l'un et l'autre terrain,

$\underline{x}$ la distance cp, $\underline{a}$, $\underline{b}$ et d la longueur Ap, Bq et pq respectivement, nous aurons :

$$Ac = \sqrt{a^2+x^2}, \quad Bc = \sqrt{b^2+(d-x)^2}$$

Donc les temps employés à parcourir ces lignes seront

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v} \text{ pour la première}$$

$$\frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v'} \text{ pour la seconde.}$$

La fonction qui doit être minimum, est alors

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v'} = t$$

Cherchons à quelle valeur de x correspond ce minimum.

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{x}{v\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{v'\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

Par suite la valeur cherchée est racine de l'équation

$$\frac{x}{v\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{v'\sqrt{b^2+(d-x)^2}} = 0.$$

La discussion serait très compliquée en conservant x pour inconnue ; il est facile au reste de voir que cette équation a une racine comprise entre $\underline{0}$ et $\underline{c}$, et qu'elle n'en a qu'une. Transformons la. Pour le faire, observons que si nous élevons en c une perpendiculaire, MN à pq, nous aurons en appelant $\underline{i}$ et $\underline{r}$ les angles ACN et BCM

$$\sin. i = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad \sin. r = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

$$\frac{\sin . i}{v} = \frac{x}{v\sqrt{a^2+x^2}} \qquad \frac{\sin . r}{v'} = \frac{d-x}{v'\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

Il résulte de là que la position du point c qui résout le problème est telle que l'on ait :

$$\frac{\sin . i}{v} = \frac{\sin . r}{v'} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin . i}{\sin . r} = \frac{v}{v'}.$$

Le point c étant nécessairement placé sur la ligne pq, sa position se trouve parfaitement déterminée par cette seule équation. Toutefois sa construction présente des difficultés et ne peut guère être effectuée que par l'introduction d'une parabole et d'un cercle, ou plus généralement de deux courbes du 2e ordre.

Nous donnerons encore un dernier exemple de maximum et de minimum pour montrer combien il faut prendre garde dans les applications géométriques de cette théorie.

Ainsi soit un cercle dont le centre est à l'origine, un point m sur l'axe des x ; on demande de déterminer les distances maximum et minimum de ce point à la circonférence.

Supposons que mn soit une solution de la question, appelons y et x les cordes du point n, a l'abscisse om et R le rayon de la circonférence, nous aurons :

$$\overline{mn}^2 = y^2 + (a-x)^2 = R^2 - 2ax + a^2$$

$R^2 - 2ax + a^2$ étant l'expression qui doit être maximum ou minimum et sa dérivée par rapport à x étant $-2a$. Il semble que nous puissions conclure de là qu'il n'y a

ni maximum ni minimum pour mn. Cependant il est évident à priori que mA est un minimum et mB un maximum.

A quoi tient cette contradiction ?

La voici :

Au point de vue géométrique la ligne mA par exemple est bien un minimum, parce qu'elle est évidemment plus courte que les lignes qui partant de m aboutissent aux points de la circonférence voisins de A. Mais observons que les abscisses de ce point sont toutes plus petites que celle de A, et que la méthode que nous appliquons à ce cas-ci donne seulement les valeurs de x telles que l'état correspondant de la fonction soit plus grand que les états de la même fonction correspondant à des valeurs de x immédiatement inférieure et supérieure.

Cette remarque fait parfaitement voir pourquoi dans le cas qui nous occupe, la méthode conduit à un résultat absurde ; c'est qu'en considérant des abscisses plus grandes que OA la question géométrique n'a plus aucun sens. Cela est tellement vrai que si on reprend le calcul, en supposant que le point donné se trouve en m', non sur l'axe des x, on trouve que $m'A'$ et $m'B'$ sont les solutions, si $m'A'B'$ passe par le centre O de la circonférence, car alors les définitions géométriques et analytiques des maxima et minima concordent.

En effet, appelons dans cette hypothèse, a' et b' les coordonnées des points m', conservons d'ailleurs les anciennes notations que ci-dessus, nous aurons :

$$\overline{m'n}^2 = (y-b')^2 + (x-a')^2$$
$$= y^2 - 2b'y + b'^2 + x^2 - 2a'x + a'^2$$

$$=R^2-2b'y-b'^2-2a'x+a'^2$$
$$=R^2-2b'\sqrt{R^2-x^2}+b'^2-2a'x+a'^2$$

Egalant à zéro la dérivée par rapport à $\underline{x}$ du second membre de cette équation. Il vient :

$$\frac{2b'x}{\sqrt{R^2-x^2}}-2a'=0$$

ou $\quad b'x-a'y=0.$

Cette équation n'étant autre chose que la condition qui doit exister entre les coordonnées du point n qui satisfait à la question, représente un second lieu du point cherché sur la circonférence ; mais ce lieu est une ligne droite qui passe évidemment par l'origine et par le point m'. Donc le théorème est évident.

Jusqu'ici nous n'avons cherché les maxima et minima que des fonctions explicites d'une seule variable. Attaquons la même question pour les fonctions implicites. Soit $\varphi(x,y)=0$ une fonction implicite de x ; si nous pouvions résoudre cette équation par rapport à y, nous en tirerions :

$$y=\chi(x)$$

et la détermination des maxima et minima de y dépendrait comme nous l'avons vu des dérivées

$$\chi'(x),\ \chi''(x)\ \ldots\ \text{ou}\ \frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ \ldots$$

suivant les règles posées précédemment.

Or, nous avons appris à calculer les différentes dérivées $\frac{\partial y}{\partial x}$. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots$ d'une fonction $y=\varphi(x)$ sans con-

-naître la fonction φ, mais seulement une relation implicite $\psi(x,y)=0$ entre x et y. Par suite la détermination des maxima et minima des fonctions implicites d'une seule variable se fera exactement d'après les mêmes principes que pour les fonctions explicites.

Si au lieu de donner la fonction implicite $\varphi(x,y)=0$ elle même on donnait n équation

$$\varphi_1=0,\ \varphi_2=0,\ \varphi_3=0,\ \ldots\ \varphi_n=0.$$

entre lesquelles éliminant $(n-1)$ variables auxiliaires, u, v, ... on obtient la fonction $\varphi(x,y)=0$. Le problème ne présenterait pas plus de difficultés, car nous savons d'un pareil système d'équations déduire les différentes dérivées $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, ...

Maxima et minima des fonctions de plusieurs variables.

On a dit qu'une fonction de plusieurs variables, x, y, z .. $f(x,y,z,..)$ est maximum pour des valeurs $x=a$, $y=b$, $z=c$, ... lorsque faisant varier ces variables dans des limites aussi resserrées qu'on le voudra aux environs des valeurs $x=a$, $y=b$, $z=c$, ... on a constamment

$$f(a,b,c,\ldots) > f(x,y,z,\ldots)$$

Au contraire pour les valeurs $x=a$, $y=b$, $z=c$, ... la fonction est dite minimum, lorsque dans les mêmes circonstances, on a toujours

$$f(a,b,c,\ldots) < f(x,y,z,\ldots)$$

Étant donné une fonction de plusieurs variables

$f(x, y, z, \ldots)$ Proposons-nous de déterminer à quelle valeur de x, y, z, ... correspondent des maxima ou des minima de cette fonction.

Raisonnons sur une fonction de deux variables x, y, en supposant continue cette fonction et toutes les dérivées dont nous aurons besoin.

Soit $f(x, y)$ cette fonction ; $x = a$, $y = b$, un système de valeur de x et y qui rendent $f(x, y)$ maximum ou minimum.

Il résulte des définitions posées plus haut que, quelque soit le signe de deux quantités α et β supposées d'ailleurs aussi petites qu'on le voudra nous devons avoir

$$f(a+\alpha, b+\beta) - f(a, b) < 0$$

si $f(a, b)$ est un maximum de $f(x, y)$,

ou $f(a+\alpha, b+\beta) - f(a, b) > 0$

Si $f(a, b)$ est un minimum de la même fonction ; et réciproquement $f(a, b)$ sera un maximum ou un minimum suivant que la première ou la seconde de ces inégalités sera remplie.

Ceci étant, posons $\alpha = ht$, $\beta = kt$.

α et β étant des quantités aussi petites que l'on voudra mais d'ailleurs quelconques. Il est bien clair que si t est une quantité variable pouvant devenir aussi peu différente de zéro qu'il plaira, les conditions ci-dessus n'assujetissent h et k qu'à avoir entre elles un rapport égal à celui de α à β, et par suite ces quantités sont tout-à-fait quelconques puisque le rapport de α à β n'est pas nécessairement déterminé. Mais alors pour que $f(a, b)$ soit un maximum ou un minimum, il faut et il suffit que

$$f(a+ht, b+kt) - f(a,b)$$

conserve toujours le même signe quel que puisse être h et k, pour que t soit très petit.

D'après cela voyons si d'une manière analogue à ce que nous avons fait précédemment pour l'extension de la série de Taylor aux fonctions de plusieurs variables, nous ne pourrions ramener la théorie des maxima et minima dans le cas qui nous occupe, à celle que nous avons traitée dans les dernières leçons.

Or, $f(x+ht, y+Kt)$ est une certaine fonction de t, je l'appelle $\varphi(t)$. $f(x,y)$ est l'état de cette fonction correspondant à la valeur $t=0$, $\varphi(0)$. Par suite $\varphi(t)$ et $\varphi(0)$ contenant les lettres x, y, h, K le problème à résoudre est celui-ci :

Déterminer, quels que soient h et K les valeurs de x et de y pour lesquelles $\varphi(t) - \varphi(0)$ conserve successivement le même signe, pour des valeurs très petites de t ; c'est-à-dire, les valeurs de x et de y telles que pour la valeur $t=0$ $\varphi(t)$ soit un maximum ou un minimum.

Il résulte de la théorie des maxima et minima des fonctions d'une seule variable que pour que cela ait lieu, il faut que $\varphi'(0)$ soit nul indépendamment de toute valeur particulière attribuée à h et K ; mais

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} \text{\&ca.}$$

Donc cette condition revient aux deux suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Ces deux équations détermineront des couples de valeurs de x et de y pouvant répondre à la question. Soit $x=a$, $y=b$ un de ces couples; voyons comment on pourra distinguer si $f(a,b)$ est maximum ou minimum.

Rappelons nous d'abord que $f(x,y)=\varphi(0)$. Donc si, quels que soient h et k, et prend les valeurs particulières $x=a$, $y=b$, $\varphi''(0)<0$ $f(a,b)$ est maximum, et si dans les mêmes conditions, $\varphi''(0)>0$, $f(a,b)$ est minimum.

mais $\varphi''(0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2$

Par suite dans l'hypothèse de $x=a$, $y=b$

$$\varphi''(0)=Ah^2+2Bhk+Ck^2;$$

Si $A=0$, $\varphi''(0)$ se réduit à $2Bhk+Ck^2$ et par conséquent on peut disposer de h et de k, de telle sorte que $\varphi''(0)$ prenne alternativement des signes contraires, Dans ce cas $f(a,b)$ n'est ni maximum ni minimum.

On verrait pareillement que la même conclusion subsiste si $C=0$, et a fortiori si $A=0$ et $C=0$.

Cependant si en même temps que $A=0$, par exemple on avait $B=0$, on ne pourrait rien affirmer, car, pour la valeur $k=0$, on aurait $\varphi''(0)=0$, et pour toutes les autres $\varphi''(0)>0$.

Écartons ces hypothèses, alors nous pourrons écrire:

$$\varphi''(0)=A\left[h^2+2\frac{B}{A}hk+\frac{C}{A}k^2\right]$$

$$= A\left[\left(h+\frac{B}{A}k\right)^2 + k^2\left(\frac{C}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)\right]$$

$$= A\left[\left(h+\frac{B}{A}k\right)^2 + \frac{k^2}{A^2}\left(AC-B^2\right)\right].$$

Delà trois cas à considérer :

1°. $AC-B^2>0$.

Dans cette hypothèse, la quantité qui multiplie A est essentiellement positive. Donc si $A>0$, $f(a,b)$ est un minimum et si $A<0$, $f(a,b)$ est un maximum.

2°. $AC-B^2<0$.

Alors la quantité entre parenthèses peut pour des valeurs particulières de $\underline{h}$ et de $\underline{k}$ recevoir successivement des signes divers. En effet, elle est négative lorsque $h+\frac{B}{A}k=0$. Si en même temps $k \gtrless 0$, et elle est positive lorsque $k=0$. Par conséquent, quelque soit le signe de A, $\varphi''(0)$ pourra être alternativement positive ou négative. Donc $f(a,b)$ n'est ni maximum ni minimum.

3°. Soit $AC-B^2=0$

$\varphi''(0)$ se réduit à $A\left(h+\frac{B}{A}k\right)^2$

S'il'on dispose de $\underline{h}$ de telle sorte que $h+\frac{B}{A}k=0$,

$\varphi''(0)=0$. Dans ce cas on ne saurait rien dire. Cette particularité de $AC-B^2=0$ se présente toujours lorsque la fonction $f(x,y)$ est telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ aient un facteur commun fonction de $\underline{x}$

x et y, et pour les valeurs de ces variables qui, prises simultanément annulent ce facteur commun. En effet soient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = MP$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = NP$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = M\frac{\partial P}{\partial x} + P\frac{\partial M}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = N\frac{\partial P}{\partial x} + P\frac{\partial N}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = M\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial M}{\partial y} \text{ ou } N\frac{\partial P}{\partial x} + P\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Donc en appelant respectivement A, B, C, les résultats des substitutions dans $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, des valeurs de x et de y qui annulent P, nous aurons :

$$A = M.\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$C = N.\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$B = M\frac{\partial P}{\partial x} \text{ ou } N\frac{\partial P}{\partial y}$$

d'où :

$$AC = M.N.\frac{\partial P}{\partial x}.\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$B^2 = M.N.\frac{\partial P}{\partial x}.\frac{\partial P}{\partial y}.$$

et par suite $AC = B^2$, ce qu'il fallait prouver.

Si l'on admet, ce qui sera démontré plus tard, que pour qu'un plan tangent à la surface représentée par l'équation $z = f(x, y)$ soit parallèle au plan des xy, il faut et il suffit que x et y désignent les coordonnées des points de contact,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

On reconnait facilement que dans les hypothèses précédentes, le plan tangent à la surface la touche tout le long d'une courbe dont les équations sont $P = 0$, $z = f(x, y)$, et réciproquement si cette circonstance se présente, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ont P pour facteur commun.

Il résulte de là une condition géométrique suffisante pour qu'on cherche le maximum ou le minimum d'une fonction de deux variables, en tombe précisément dans le cas de $AC - B^2 = 0$

Il est facile de voir qu'elle est remplie toutes les fois que $z = f(x, y)$ représente une surface de révolution, dont la génératrice est fermée et ne rencontre pas l'axe.

Revenons à notre discussion. Nous avons laissé de côté les cas où on aurait $\varphi''(0) = 0$; mais il est bien clair que l'embarras qu'ils peuvent présenter sera facilement levé au moyen des fonctions $\varphi'''(0)$, $\varphi^{IV}(0)$, ... comme nous l'avons vu dans la théorie relative aux fonctions d'une seule variable. Mais n'insistons pas

sur ces cas-là, car ils sont rares, quand ils se présentent, on peut presque toujours affirmer qu'il n'y a ni maximum ni minimum.

Disons un mot relativement à une fonction de trois variables, $f(x,y,z)$.

Sans répéter ici les raisonnements que nous avons suffisamment développés dans le cas d'une fonction de deux variables, et qui seraient à très peu près les mêmes ici, concluons que les valeurs de x, y, z capable de rendre notre fonction maximum ou minimum forment une solution des systèmes des trois équations ci après :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

D'ailleurs si $x=a$, $y=b$, $z=c$, est une des solutions de ce système, on reconnait facilement que pour décider si $f(a,b,c)$ est maximum, minimum, ou ni l'un ni l'autre, on sera conduit à considérer un polynome du second degré de la forme :

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2+2Dhl+2Ekl+Fl^2=P$$

$f(a,b,c)$ sera maximum ou minimum suivant que l'on aura indépendamment de toute valeur particulière attribuée à h, k et l; $P<0$ ou $P>0$. On verra pareillement que si en donnant à $\underline{h}$, $\underline{k}$, $\underline{l}$, des valeurs particulières différentes, on obtient successivement pour P des résultats de signes contraires, $f(a,b,c)$ ne sera ni un maximum ni un minimum.

Enfin on trouvera que si on peut avoir $P=0$, soit indépendamment de toute valeur attribuée à $\underline{h}$, $\underline{k}$, $\underline{l}$, soit pour des valeurs particulières de ces quantités,

alors on ne saurait rien dire.

Ceci posé. Indiquons en peu de mots la marche à suivre pour discuter P.

Si $A=0$, P se réduit à :

$$2(BK+Dl)h+CK^2+2EKl+Fl^2$$

et par conséquent on peut disposer de h, K, l, de telle sorte que P prend alternativement des signes contraires. Donc dans ce cas $f(a,b,c)$ n'est ni maximum ni minimum.

On voit pareillement que la même conclusion subsiste quand l'un quelconque des coefficients A, C, F est nul, ou quand deux d'entr'eux sont nuls à la fin, ou à fortiori, quand tous les trois sont nuls.

Cependant, toutes les fois que dans l'une quelconque de ces hypothèses, il arrivera que P soit nul, où par suite de l'accroissement d'un certain nombre de ses coefficients, ou par suite de valeurs nulles attribuées à deux au plus des quantités $\underline{h}$, $\underline{K}$, $\underline{l}$, sans que pourtant cette quantité soit susceptible de changer de signe dans d'autres hypothèses particulières faites sur $\underline{h}$, $\underline{K}$, $\underline{l}$, on ne pourrait rien dire.

Rejetons ces divers cas. Alors on peut écrire :

$$T=A\left[h^2+2\frac{h}{A}(BK+Dl)+\frac{1}{A^2}(BK+Dl)^2\right]+A\left[A'K^2+2B'Kl+C'l^2\right]$$

On voit que si on supposait $A'=0$ ou $C'=0$, ou bien $A'=0$ et $C'=0$, il serait possible de déterminer $\underline{h}$, $\underline{K}$, $\underline{l}$, de telle sorte que P fût tantôt positif, tantôt négatif ; par suite dans ce cas $f(a,b,c)$ ne serait ni maximum ni minimum.

Il faut toutefois excepter le cas où dans l'une de ces hypothèses on aurait aussi $B'=0$, car alors on ne

n'aurait disposer de h, k, l, que de manière à rendre P constamment positif ou nul.

Excluons ces particularités et nous pourrons poser

$$A'k^2+2B'kl+C'l^2 = A'\left[k^2+2\frac{B'}{A'}kl+\frac{B'^2}{A'^2}l^2\right]+A''k^2,$$

de telle sorte qu'en définitive P est de la forme :

$$Am^2+AA'm^2+AA''k^2.$$

m et n étant des fonctions de h et de k respectivement égales à $\left(h+\frac{Bk+Dl}{A}\right)^2$ et $\left(k+\frac{B'}{A'}l\right)^2$,

Il résulte de là que si $A''=0$, on ne peut disposer de h, k, l ; que de manière que P soit constamment positif ou nul ; ce cas est donc douteux.

Ces préliminaires établis, je n'entrerai pas plus avant dans les discussions de P. Je ferai toutefois observer que dans toutes les hypothèses possibles, l'une des trois équations h, k, l, étant nécessairement différente de zéro, il sera commode de transformer P de manière à y introduire comme variables l et les deux rapports $\frac{h}{l}$, $\frac{k}{l}$, par exemple, en mettant l^2 en facteur commun de tous ses termes, car alors l^2 étant nécessairement >0, on n'aura plus réellement à considérer qu'un polynome du second degré à deux variables.

Le mode de raisonnement que nous avons exposé plus haut relativement aux fonctions de deux variables, est évidemment applicable aux fonctions d'un nombre quelconque de variables, on en conclut la règle suivante.

Pour qu'un système de valeur de variables indépendantes x, y, z, ... rende maximum ou minimum

une fonction $f(x, y, z, ..)$ dont toutes les différentielles sont continues. Il faut que, indépendamment de toute valeur particulière attribuée aux différentielles de ces variables, ce système de valeur annule un nombre impair de différentielles consécutives de la fonction, à partir de la première; et quand cette condition est remplie, on a un maximum ou un minimum suivant que, dans les mêmes hypothèses la différentielle suivante est négative ou positive.

Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que des maxima et minima des fonctions explicites de plusieurs variables indépendantes. Nous n'avons qu'un mot à dire pour étendre la théorie au cas des fonctions implicites.

Soit t une fonction implicite de variables indépendantes $x, y, z, \ldots$, soient $A=0$, $B=0$, $C=0$, ... un nombre n d'équations entre $x, y, z, \ldots t$ et $(n-1)$ variables auxiliaires $u, v, \ldots$ l'élimination de $u, v \ldots$ entre ces n équations fournirait une relation $\varphi(x, y, z, \ldots t)=0$. Il est clair que si on pouvait obtenir cette relation, et en tirer $t=\psi(x, y, z, \ldots)$ nous ne serions point embarassés pour résoudre le problème. Mais il résulte aussi des règles données ci dessus que la solution ne dépend que des diverses différentielles.

$$dt,\ d^2t,\ d^3t,\ \ldots.$$

et d'ailleurs nous savons de n équations telles que $A=0$, $B=0$, ... déduire ces diverses différentielles; donc la détermination des maxima ou minima d'une fonction implicite de variables indépendantes

ne s'aurait offrir aucune difficulté, au point de vue théorique.

Il est bon de remarquer que la règle au moyen de laquelle on détermine les maxima et minima des fonctions de plusieurs variables indépendantes, comprend, comme cas particulier, celle donnée relativement aux fonctions d'une seule variable.

Passons à quelques exemples.

De tous les triangles de même périmètre $2p$, quel est celui dont la surface est maximum ?

Appelons x et y deux des   de ce triangle, sa surface sera exprimée par $\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$.
p étant une quantité constante, l'expression qu'il faut rendre maximum est donc :

$$(p-x)(p-y)(x+y-p)=f.$$

or, $\dfrac{\partial f}{\partial x}=(p-y)(2p-2x-y)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=(p-x)(2p-2y-x)$

Donc les valeurs de x et y auxquelles pourront correspondre un maximum ou un minimum de f, sont les solutions communes aux deux équations.

$$(p-y)(2p-2x-y)=0$$
$$(p-x)(2p-2y-x)=0.$$

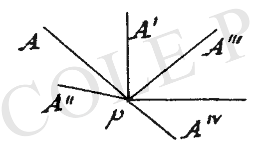
A ces équations on peut substituer les quatre systèmes suivants, formés chacun de deux équations plus simples :

$p-y=0$	$p-y=0$	$p-x=0$	$2p-2y-x=0$
$p-x=0$	$2p-2y-x=0$	$2p-2y-x=0$	$2p-2x-y=0$

Le troisième coté z du triangle étant déterminé dans tous les cas par la relation $z = 2p - x - y$, on voit que les valeurs de x et y déterminées par les trois premiers systèmes sont telles que l'un des cotés du triangle est nul ; par suite ces valeurs ne sauraient correspondre qu'à un minimum de f. Quant au quatrième système il donne $x = y - z = \frac{2p}{3}$, il est bien clair qu'à ces valeurs correspond un maximum de f, car on reconnait à priori que la question est toujours susceptible de maximum.

Ainsi le triangle équilatéral est le triangle demandé.

Étant donné m point A, A', A'' . . . rapportés à trois axes rectangulaires, dont les coordonnées sont respectivement $(a, b, c)\ (a', b', c'), (a'', b'', c''), (a''', b''', c''')$ . . . Quel est le point p tel que la somme des carrés de ses distances aux m points A, A', A'', . . . est un minimum.



Appelons x, y, z les coordonnées du point p, nous aurons alors :

$$\overline{pA}^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

$$\overline{pA'}^2 = (x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2$$

$$\overline{pA''}^2 = (x-a'')^2 + (y-b'')^2 + (z-c'')^2$$

. . . .

d'où :

$$\overline{pA}^2 + \overline{pA'}^2 + \overline{pA''}^2 + \cdots = m(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$-2(a+a'+a''+\cdots)x-2(b+b'+b''+\cdots)y-2(c+c'+c''+\cdots)z$$
$$+(a^2+a'^2+a''^2+\cdots)+(b^2+b'^2+b''^2+\cdots)+(c^2+c'^2+c''^2+\cdots)$$

Appelons f la fonction qu'il s'agit de rendre minimum; Il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2mx-2(a+a'+a''+\cdots)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=2my-2(b+b'+b''+\cdots)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=2mz-2(c+c'+c''+\cdots)$$

Les valeurs de x, y, z, auxquelles correspond un maximum ou un minimum de f sont donc :

$$x=\frac{a+a'+a''+\cdots}{m},\ y=\frac{b+b'+b''+\cdots}{m},\ z=\frac{c+c'+c''+\cdots}{m}$$

D'ailleurs $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2m$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2m$$

Donc, m étant nécessairement une quantité positive, l'état de la fonction f correspondant à ces valeurs est un minimum, et il est évident que le point qu'elles déterminent n'est autre que le centre de gravité du système des m points donnés

Maxima et Minima des fonctions de variables indépendantes entre lesquelles il existe des relations données.

Soit une fonction $f(x, y, z, ..)$ de plusieurs variables indépendantes. Supposons ces variables assujetties à vérifier un certain nombre de relations, moindre pourtant que le leur,

$$(1) \quad \begin{aligned} &\varphi_1(x, y, \ldots z, \ldots t) = 0 \\ &\varphi_2(x, y, \ldots z, \ldots t) = 0 \\ &\varphi_3(x, y, \ldots z, \ldots t) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et voyons comment on pourra déterminer les valeurs de $x, y, z, \ldots t$ auxquelles répond un maximum ou un minimum de $f(x, y, z, \ldots t)$.

Pour cela, remarquons que les n équations (1) résolues par rapport à n des variables $x, y, z, \ldots t$ donneraient par exemple $z = \psi_1(x, y, ..), \ldots t = \psi_n(x, y)$ et que ces valeurs substituées dans la fonction f lui donneraient la forme d'une fonction de variables indépendantes autres que $z, \ldots t$, seulement si on pouvait obtenir cette fonction $F(x, y, ..)$ on trouverait aisément les valeurs de $x, y, \ldots$ qui la rendent maximum ou minimum, et par suite, au moyen des équations (1) les valeurs de $z, \ldots t$, correspondantes, Donc le problème de la détermination des maxima ou minima de f serait résolu dans les conditions données. Mais il est bien clair que si au lieu de trouver la fonction F, nous pouvions avoir ses différentielles successives, ce serait absolument la même chose.

Or, nous avons appris à calculer les différentielles successives d'une fonction ainsi déterminée, par conséquent, nous pourons regarder la question comme complètement traitée.

Toutefois, nous insisterons un peu sur la manière

d'arriver à l'équation $\partial F = 0$, dont on aura besoin bien certainement. Égalant à zéro les différentielles des diverses fonctions $f, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ il nous vient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \cdots + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} dz + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} dt = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} dy + \cdots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} dz + \cdots + \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} dt = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} dy + \cdots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} dz + \cdots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} dt = 0$$

. . . .

Pour obtenir $\partial F = 0$, il nous suffira d'éliminer entre ces $(n+1)$ équations les différentielles $dz, \ldots dt$, des variables que nous considérons comme dépendantes des autres. Donnons à cette élimination une forme élégante. Multiplions la seconde de ces équations par α_1, la troisième par α_2, la quatrième par $\alpha_3, \ldots$ et ajoutant les autres membre à membre, il nous viendra :

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \cdots\cdots\right) dx \\
\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + \cdots\cdots\right) dy \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \alpha_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \cdots\cdots\right) dz \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \alpha_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + \cdots\cdots\right) dt
\end{array}\right\} = 0 \quad (2)$$

Or, si nous déterminons $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ de manière que

les coefficiens des différentielles dz, ... dt seraient identiquement nules, et si nous substituons les valeurs ainsi obtenues dans l'équation (2), nous obtiendrons l'équation cherchée $dF=0$.

D'ailleurs l'égalité à zéro de dF entraine celle des coefficiens de dx, dy, ... et réciproquement; mais la substitution des valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, .. dans (2) ne modifie que les coefficiens de ces diverses différentielles. Donc on obtiendra aussi les équations qui donnent les valeurs de x, y, ... auxquelles peut répondre un maximum ou un minimum de F en éliminant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ... entre les équations fournies par l'égalité à zéro des coefficiens des diverses différentielles $dx, dy, \dots dz, \dots dt$, dans (2). De là une règle commode à suivre dans la pratique.

Donnons encore un exemple:

De tous les parallélipipèdes rectangles dont la somme des cerles est la même, quel est celui dont le volume est maximum.

Soit x, y, z, les trois cerles de ce parallélipipède, la somme x, y, z étant constante et égale à $\underline{p}$; il s'agit de déterminer le maximum du produit x, y, z. D'après ce qui précède les valeurs de x, y, z, qui peuvent convenir seront fournies par l'élimination de α entre les trois équations:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\alpha\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}=yz+\alpha=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\alpha\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}=xz+\alpha=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}+\alpha\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}=yx+\alpha=0$$

et la relation de condition $x+y+z=p$.
On en conclut $x=y=z=\frac{p}{3}$.
Ou bien un système de valeur dans lequel deux au moins des inconnues sont nulles.

La seule solution admissible est la première; les autres correspondent évidemment au minimum des volumes considérés.

Ainsi le parallélipipède cherché est un cube.

Observations générales sur les maxima et minima.

Considérons une fonction $f(x)$ d'une seule variable, continue ainsi que ses dérivées. Nous savons que les valeurs de $\underline{x}$ qui rendent une pareille fonction maximum ou minimum sont racines de l'équation $f'(x)=0$. Nous avons vu d'ailleurs que quel que soit $\underline{h}$, on a :

$$f(x+h)-f(x)=h\left[f'(x)+\varepsilon\right] \quad (1)$$

$\underline{\varepsilon}$ étant une quantité infiniment petite avec $\underline{h}$.

Ceci posé, donnons à $\underline{x}$ une valeur quelconque, non racine de l'équation $f'(x)=0$, et à $\underline{h}$ une valeur infiniment petite; $h\left[f'(x)+\varepsilon\right]$ sera infiniment petit avec $\underline{h}$, mais infiniment petit du même ordre que $\underline{h}$, puisque, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, $f'(x)$ se réduit à une quantité finie et déterminée. Donnons au contraire à $\underline{x}$ une valeur racine de l'équation $f'(x)=0$, l'état correspondant de $h\left[f'(x)+\varepsilon\right]$, $h\varepsilon$, sera alors infiniment petit d'un ordre supérieur à celui de $\underline{h}$. Concluons de là que, l'accroissement infiniment petit d'une fonction d'une seule variable, continue ainsi que ses dérivées, corres-

-pondant à un accroissement infiniment petit de sa variable, est d'un degré supérieur ou égal au sien, suivant que l'état primitif de cette fonction est ou n'est pas un maximum ou un minimum.

Cette remarque peut servir dans la pratique à trouver le maximum ou le minimum de certaines fonctions qu'il serait très difficile de traiter par l'analyse.

Coulomb en a fait des applications fort utiles.

Revenons à la relation (1). Faisons y toujours h infiniment petit, et négligeons dans son second membre le terme $h\varepsilon$ infiniment petit d'un ordre supérieur à celui de h ; si nous désignons par P la différence $f(x+h) - f(x)$ ainsi modifiée, il est évident que toute valeur de x qui annulera $f'(x)$ annulera P, et réciproquement.

Une pareille observation peut paraître sans utilité; Cependant, dans bien des cas, elle fournit une méthode simple pour déterminer les valeurs de x qui rendent maximum une fonction $f(x)$; cela tient à ce que souvent, il est facile d'obtenir la fonction P au moyen des données immédiates de la question qui conduirait à chercher le maximum ou le minimum de $f(x)$.

* Lemme — Dans un triangle $B\omega A$ rectangle en A. Si l'angle ω est infiniment petit, la différence entre l'hypoténuse ωB, et le coté ωA de l'angle droit est infiniment petit par rapport à ω.

En effet, $\omega A = \omega B \cos.\omega$.

Donc $\omega B - \omega A = \omega B(1-\cos.\omega) = 2\omega B \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega$.

On peut encore écrire cette différence sous la forme :

---

* Ce que nous venons de dire relativement aux fonctions d'une seule variable est applicable aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. Les démonstrations sont tout à fait analogues; nous les supposerons faites.
Avant d'aller plus loin établissons un lemme important.

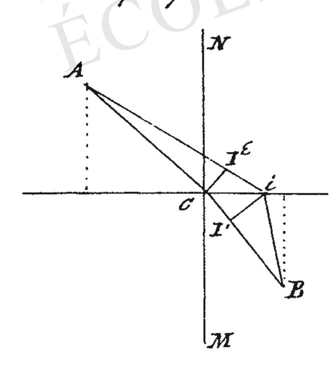
$$\omega B - \omega A = \omega B . \left(\frac{\sin . \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}\right)^2 . \frac{\omega^2}{2} .$$

Or, ω étant infiniment petit, $\frac{\sin . \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}$ est infiniment peu différent de l'unité, d'ailleurs ωB est une quantité fixe et bien déterminée, donc le rapport $\frac{\omega B - \omega A}{\omega}$ est infiniment petit avec ω, par conséquent la différence $\omega B - \omega A$ est infiniment petite par rapport à ω, ce qu'il fallait prouver.

Nous voyons de plus qu'en général la différence de $\omega B - \omega A$ est d'un degré d'infiniment petit double de celui de ω.

Passons à quelques applications des principes qui précèdent.

1er Exemple. Proposons nous de nouveau le problème de Fermat résolu page 207. Conservons les mêmes notations que plus haut. Soit donc C le point de rencontre du chemin avec la ligne pq, x la distance pc de ce point à la projection de A sur pq. Le chemin étant composé de deux lignes droites AC, BC, la fonction qu'il faut rendre minimum est



$$\frac{AC}{v} + \frac{BC}{v'} = f(x)$$

Donnons à x un accroissement $cc' = h$, infiniment petit, nous aurons alors :

$$\frac{AC'}{v} + \frac{BC'}{v'} = f(x+h)$$

et par suite:

$$\frac{AC'-AC}{v}+\frac{BC'-BC}{v'}=f(x+h)-f(x).$$

Ceci fait, par les points C et C' menons CI et $C'I'$ perpendiculaire respectivement à AC et OB; et voyons à calculer la fonction P.

Pour cela observons que CC' et les angles CAC', CBC' sont necessairement infiniment petits d'un même ordre, il suit delà, et du lemme ci dessus qu'en prenant CI pour la différence $C'A-CA$ et CI pour la différence $CB-C'B$, nous ne négligerons que des infiniment petits d'un ordre supérieur à celui de h. Or le triangle rectangle $CI'C'$ nous donne $CI'=CC'\cos C'CI'=CC'\sin r$; le triangle CIC' donne de son côté les égalités ci après:

$$C'I=CC'\frac{\sin.ICC'}{\sin.CIC'}=CC'\frac{\sin I}{\sin.CIC'}=CC'\frac{\sin.I}{\cos.A}$$

mais $\cos.A=1-\frac{1}{1.2}A^2+\cdots\cdots$

Donc si dans l'expression de CI nous supposons $\cos.A=1$, nous ne négligeons que des infiniment petits d'un ordre supérieur à celui de A, et par la même à celui de h, et nous obtiendrons l'expression $IC'=CC'\sin.I$.

Il résulte évidemment de ces valeurs de $C'I$ et CI'

$$P=\frac{CC'\sin.i}{v}-\frac{CC'\sin.r}{v'}$$

Egalant cette fonction à zéro, il viendra:

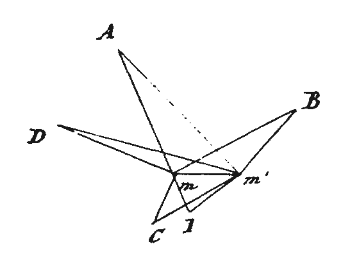
$$\frac{CC'\sin.i}{v}=\frac{CC'\sin r}{v'}$$

où

$$\frac{\sin.i}{v}=\frac{\sin.r}{v'}.$$

La valeur $x = \mu c$ doit donc être telle que cette condition soit remplie; c'est la même qui nous avait fourni la première méthode.

2.e Exemple. Etant donnés m points $A, B, C, D, \ldots$ situés d'une manière quelconque dans l'espace, on demande de trouver un point m dont la somme des distances aux points $A, B, C, D, \ldots$ soit un minimum.



Supposons nos points rapportés à trois axes rectangulaires quelconques, et soient x, y, z les coordonnées du point m. La fonction qu'il s'agit de rendre minimum est $Am + Bm + Cm + Dm + \cdots = f(x, y, z)$.

Donnons à x, y, z des accroissemens infiniment petits h, k, l, d'ailleurs tout-à-fait quelconques; soit m' le point ainsi déterminé, nous aurons :

$$Am' + Bm' + Cm' + Dm' + \cdots = f(x+h, y+k, z+l)$$

et par suite :

$$f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z) = Am' - Am + Bm' - Bm + Cm' - Cm + \cdots$$

Cela posé, désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ respectivement les angles que font avec mm' les droites $mA, mB, mC, mD, \ldots$, et des points m' abaissons des perpendiculaires sur ces mêmes droites; soit $m'I$ celle qui est abaissée sur mA. Il est bien évident que, en négligeant les quantités infiniment petites d'un degré supérieur à celui des accroissemens h, k, l, nous pourrons écrire :

$$mI = IA - mA = m'A - mA$$

et par suite : $m'A - mA = -mm' \cos.\alpha$.

Aux mêmes conditions nous obtiendrons de la même manière

$$m'B - mB = -mm' \cos.\beta$$

$$m'C - mC = -mm' \cos.\gamma$$

$$m'D - mD = -mm' \cos.\delta$$

. . . .

Nous concluons de là :

$$P = -mm'(\cos.\alpha + \cos.\beta + \cos.\gamma + \cos.\delta + \cdots)$$

Or, désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, ... et a, b, c, les angles que font respectivement avec les axes des x, y, z, les diverses droites mA, mB, mC, ... et mm' ; il nous viendra :

$$\cos.\alpha = \cos.\alpha_1 \cos.a + \cos.\alpha_2 \cos.b + \cos\alpha_3 \cos.c$$

$$\cos.\beta = \cos.\beta_1 \cos.a + \cos.\beta_2 \cos.b + \cos.\beta_3 \cos.c$$

$$\cos.\gamma = \cos.\gamma_1 \cos.a + \cos.\gamma_2 \cos.b + \cos.\gamma_3 \cos.c$$

. . . .

d'où :

$$\begin{aligned}\cos.\alpha + \cos.\beta + \cos.\gamma + \cdots = {} & \cos.a(\cos.\alpha_1 + \cos.\beta_1 + \cos.\gamma_1 + \cdots) \\ & + \cos.b\,(\cos.\alpha_2 + \cos.\beta_2 + \cos.\gamma_2 + \cdots) \\ & + \cos.c\,(\cos.\alpha_3 + \cos.\beta_3 + \cos.\gamma_3 + \cdots)\end{aligned}$$

Égalant à zéro l'expression de P modifiée au moyen de cette dernière relation et nous aurons :

$$\Big[\cos.a\,(\cos.\alpha_1 + \cos.\beta_1 + \cos.\gamma_1 + \cdots) + \cos.b\,(\cos.\alpha_2 + \cos.\beta_2 + \cos\gamma_2 + \cdots) + \cos.c\,(\cos.\alpha_3 + \cos.\beta_3 + \cos.\gamma_3 + \cdots)\Big] = 0$$

ou bien en divisant par mm'

$$\cos.a\,(\cos\alpha_1 + \cos.\beta_1 + \cos.\gamma_1 + \cdots) + \cos.b\,(\cos.\alpha_2 + \cos.\beta_2 + \cos.\gamma_2 + \cdots) + \cos.c\,(\cos\alpha_3 + \cos\beta_3 + \cos.\gamma_3 + \cdots) = 0$$

Cette équation se décompose nécessairement en trois autres, savoir :

$$\cos.\alpha_1 + \cos.\beta_1 + \cos.\gamma_1 + \cdots\cdots = 0$$
$$\cos.\alpha_2 + \cos.\beta_2 + \cos\gamma_2 + \cdots\cdots = 0 \quad (1)$$
$$\cos.\alpha_3 + \cos.\beta_3 + \cos.\gamma_3 + \cdots\cdots = 0$$

Car elle doit exister quelque soit la direction de la ligne mm' dans l'espace, quelle que soient par conséquent les angles $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.

Ces trois équations (1) déterminent bien la position du point m, car si on substituait aux diverses quantités $\cos.\alpha_1$, $\cos.\beta_1$, ... $\cos.\alpha_2$, $\cos.\beta_2$, ... $\cos.\alpha_3$, $\cos.\beta_3$ .... leurs expressions en fonction des coordonnées $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ et de celles des divers points donnés, on obtiendrait trois équations entre les trois inconnues de la question.

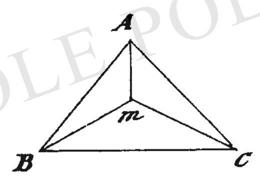
Au lieu de revenir à ces équations pour déterminer le point m, on peut se contenter d'en déduire une propriété qui la caractérise. Or, imaginons des forces égales entre elles appliquées au point m et dont les directions soient mA, mB, mC, ...; les trois équations (1) expriment, comme il est facile de le voir, les conditions pour que ces forces se fassent équilibre. Le point m cherché jouit de cette propriété que des forces égales appliquées en un point suivant les lignes mA, mB, mC .... se font équilibre.

Il est clair que cette propriété fixe parfaitement la position dans l'espace.

Un cas particulier remarquable du problème général que nous venons de traiter est celui où l'on ne donne que trois points, lesquels sont par suite dans un même plan

Soient A, B, C, ces trois points, m le point inconnu.

Ce point étant tel que trois forces égales y appliquées et dirigées suivant mA, mB, mC, se fassent équilibre; il est évident que chacune des droites mA, mB, mC, devra diviser en deux parties égales l'angle formé par les deux autres. Le point cherché est par suite le point commun à trois segmens capables d'un angle de 120° décrits sur les côtés AB, AC, BC comme cordes. On verra facilement que le problème est impossible si l'un des angles du triangle ABC est plus grand que 120°.



Applications géométriques du calcul différentiel.

Des aires et des longueurs des courbes rapportées à des coordonnées rectilignes.

Une courbe plane étant rapportée à deux axes situés dans son plan, on appelle aire d'un arc BM de cette courbe, la portion de plan comprise entre cet arc, les ordonnées BQ, MP de ses extrémités et l'axe des x.

D'après cette définition, si nous supposons que l'une des extrémités B de l'arc BM reste fixe et que l'autre M soit mobile, l'aire de cet arc variera avec la position du point M; par conséquent cette aire est une certaine fonction de l'abscisse de ce point.

Sans connaître la forme de cette fonction, on peut facilement trouver sa différentielle.

Supposons d'abord l'arc BM situé tout entier au dessus de l'axe des x; soient $\underline{x}$ et $\underline{y}$ les coordonnées du point M, et $y = f(x)$ l'équation de la courbe. Donnons à $\underline{x}$ un accroissement $PP' = \Delta x$ positif. Il en résultera pour $\underline{y}$ un accroissement $\Delta y = m'p - MP$; et si nous désignons par A l'aire de l'arc BM, son accroissement correspondant ΔA sera certainement compris entre les surfaces des parallélogrammes $M'm'Pp$, $MmPp$. Or, θ étant l'angle des axes,

$$\text{surf. } M'm'Pp = \Delta x.(y+\Delta y) \sin.\theta$$
$$\text{surf. } MmPp = \Delta x.\ y.\sin.\theta$$

Donc on aura :

$$\Delta x.(y+\Delta y)\sin.\theta > \Delta A > \Delta x.y\sin.\theta, \text{ si } \Delta y > 0$$

ou $$\Delta x.(y+\Delta y)\sin.\theta < \Delta A < \Delta x.y\sin.\theta, \text{ si } \Delta y < 0.$$

Mais Δx étant supposé positif, ces inégalités fournissent respectivement les suivantes :

$$(y+\Delta y)\sin.\theta > \frac{\Delta A}{\Delta x} > y\sin.\theta$$

ou $$(y+\Delta y)\sin.\theta < \frac{\Delta A}{\Delta x} < y\sin.\theta$$

qui donnent à la limite :

$$y\sin.\theta = \frac{dA}{dx}$$

d'où : $dA = y\sin.\theta\, dx$ (1)

Pour arriver à ce résultat, nous avons supposé :

1°. que x variant de oP à op, y était constamment positif.

2°. que dans les mêmes circonstances, y était constamment décroissante ou constamment croissante.

3°. que Δx était positif.

De ces hypothèses, la dernière est toujours permise; on peut prendre Δx assez petit pour que la seconde le soit. Et enfin, si nous convenons de regarder comme négatives les aires des lignes situées au dessous de l'axe des x, la première le sera pareillement avec cette restriction, nous généralisons donc la formule (1) et nous l'énonçons comme il suit:

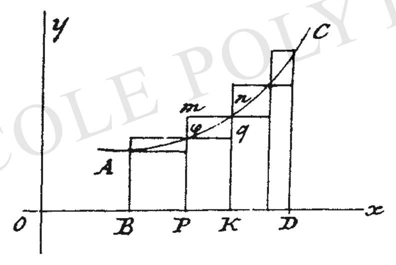
La différentielle de l'aire d'un arc de courbe, dont une des extrémités seule est variable est égale au produit de l'ordonnée de cette extrémité par la différentielle de son abscisse et le sinus de l'angle des axes.

Lemme 1. Soient $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \Delta_3 x, \ldots \Delta_p x$ des quantités dont la somme est constante et égale à X. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_p$ des fonctions de x s'annulant respectivement avec $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \Delta_3 x, \ldots \Delta_p x$; zéro est la limite de la somme des produits $\varepsilon_1 \Delta_1 x, \varepsilon_2 . \Delta_2 x, \varepsilon_3 . \Delta_3 x, \ldots \varepsilon_p . \Delta_p x$ quand on suppose que les quantités $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \Delta_3 x, \ldots$ diminuent indéfiniment à mesure que leur nombre augmente.

En effet, désignons par Σ la somme de ces produits et par ε_n la plus grande, abstraction faite du signe, des quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_p$; nous aurons évidemment $\Sigma < \varepsilon_n . X$; or zéro est la limite du second membre de cette inégalité, puisque c'est la limite de ε_n. Donc zéro est aussi la limite de Σ, ce qu'il fallait prouver.

Théorème. Soit AC un arc de courbe plane B, D, les pieds des coordonnées de ses extrémités.

Prenons sur l'arc AC des points quelconques,



$A, p, q \ldots$, par ces points menons des parallèles à l'axe des y jusqu'à leur rencontre avec l'axe des x, et des parallèles à l'axe des x jusqu'à leur rencontre avec les ordonnées des points de division qui précèdent et suivant immédiatement. Nous formerons ainsi deux séries de parallélogrammes les uns tels que $p\,q\,K\,I$ inscrits à la courbe, les autres, tels que $m\,n\,K\,I$ circonscrits. L'aire de l'arc AC est la limite vers laquelle converge la somme de l'une ou l'autre de ces deux séries de parallélogrammes, quand on suppose que les points de divisions se rapprochent indéfiniment les uns des autres, en même temps que leur nombre croît au delà de toute limite.

Pour le faire voir, observons que l'aire de l'arc AC est toujours comprise entre les sommes des deux séries de parallélogrammes. Par suite, si je prouve que chacune de ces sommes a une limite, et pour toutes deux cette limite est la même, tout sera fini.

Or, considérons la série des parallélogrammes inscrits. Leur somme augmente constamment avec le nombre des points de division ; mais elle est toujours inférieure à l'aire de l'arc AC. Donc elle a une limite. De même la somme des parallélogrammes circonscrits diminue constamment quand le nombre des points de division augmente ; mais elle est toujours supérieure à l'aire de l'arc AC, donc elle a aussi une limite.

Cela étant, la différence entre les deux séries de parallélogrammes est évidemment la somme Σ des petits parallélogrammes tel que mnpq ; quelque soit le nombre des divisions de l'arc AC, leurs bases forment ensemble la projection BD de cet arc. Par suite, d'après le lemme I, zéro est la limite de Σ.

On sait d'ailleurs que la limite de la différence de deux quantités variables est la différence de leurs limites, par conséquent ce théorème est démontré.

Il est bon de remarquer qu'il ne suppose absolument aucune relation entre les divisions de l'arc AC.

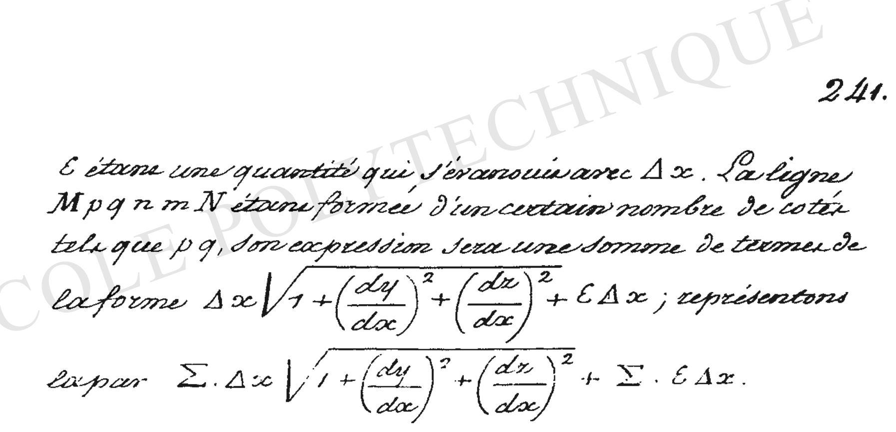
Lemme 2. Dans un arc de courbe, plane ou non, inscrivons une ligne polygonale quelconque. De plus imaginons qu'on diminue indéfiniment ses côtés, en même temps qu'on fait croître leur nombre jusqu'à l'infini. Le périmètre de cette ligne polygonale aura toujours une limite.

Soit MN un arc de courbe, Mqpn mN une ligne brisée inscrite dans cet arc. Considérons l'un des ___ qp de cette ligne brisée. $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$, étant les coordonnées rectangulaires du point q, $x+\Delta x$, $y+\Delta y+z\,\Delta z$, celles du point p, nous aurons :

$$pq = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$$

$$= \Delta x \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}$$

$$= \Delta x \left[\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}+\varepsilon\right]$$

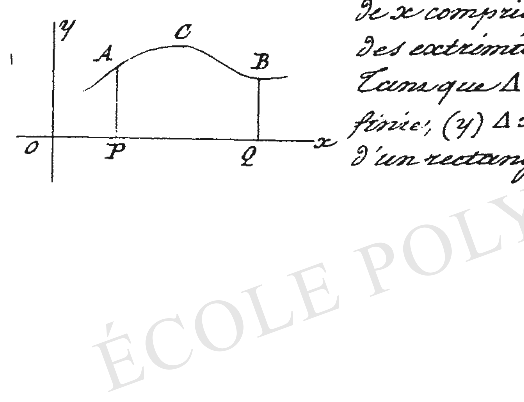


ε étant une quantité qui s'évanouit avec Δx. La ligne $Mpqn\,mN$ étant formée d'un certain nombre de côtés tels que pq, son expression sera une somme de termes de la forme $\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}+\varepsilon\Delta x$; représentons la par $\Sigma.\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}+\Sigma.\varepsilon\Delta x$.

Or, la somme des quantités telles que Δx est constante et égale à la projection de MN sur l'axe des x, donc d'après le lemme 1, $\Sigma.\varepsilon\Delta x$ a pour limite zéro, et il me reste à prouver que $\Sigma.\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ a une limite.

Pour y arriver rappelons-nous que toutes les fois que l'une des coordonnées d'un point d'une courbe est déterminée, les autres le sont par une conséquence nécessaire. Il résulte de là que les quantités $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ et par suite $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ sont des fonctions de x.

Soit $\varphi(x)=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$. Construisons la courbe plane qui serait représentée en coordonnées rectilignes par l'équation $y=\varphi(x)$, et supposons que ACB soit la portion de cette courbe correspondante à des valeurs de x comprises entre les abscisses des extrémités de l'arc MN.



Tant que Δx reçoit une valeur finie, $(y)\Delta x$ exprime la surface d'un rectangle inscrit à la courbe

ACB; partant la somme $\Sigma.(y)\Delta x$ n'est autre chose qu'une somme de rectangles inscrits à cette courbe, et dont les bases forment ensemble la différence PQ des abscisses des points A, B. Mais

$$(y)\Delta x = \Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Donc $\Sigma.\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ a une limite et cette limite n'est autre que l'aire de l'arc AB.

Quand nous disons qu'une ligne est égale à une surface. Il est évident que nous entendons par là que cette ligne et cette surface ont même expression algébrique.

On appelle longueur d'un arc de courbe, la limite d'une ligne polygonale quelconque inscrite dans cet arc, dont les côtés diminuent indéfiniment en même temps que leur nombre croît à l'infini.

De cette définition et du Lemme 2, nous pourons conclure la différentielle de la longueur d'un arc de courbe, dont l'une des extrémités est supposée fixe et invariable.

Soient en effet $\underline{x_1}$ et $\underline{x}$ les abscisses des extrémités de cet arc, $\underline{s}$ sa longueur, A l'aire de la portion de la courbe $(y)=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ comprise entre les abscisses $\underline{x_1}$ et x, nous aurons $A=S$ et par suite $dA=dS$. Mais

$$dA=(y)dx=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

D'où aussi $ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$.

Dans les expressions $ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, et $dA = y\,dx$, il résulte comme nous le voyons que les coordonnées de l'une des extrémités de l'arc qui les a fournies seu

Cela tient évidemment à l'hypothèse particulière dans laquelle nous les avons établies, savoir que l'une des extrémités de l'arc restait fixe dans l'un et l'autre cas.

Théorème. Considérons un arc de courbe $MM'M''$ dont les extrémités M et M'' aient respectivement pour coordonnées $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$, et $x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z$; la corde MM'' de cet arc aura pour expression :

$$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}.$$

Quant à l'arc MM'' regardons-le comme l'accroissement Δs d'un arc s nul ; alors quelle que soit la variable indépendante, nous pourrons écrire :

$$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2} = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2+\varepsilon}$$

$$\text{et} \qquad \Delta s = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2+\varepsilon'}.$$

ε et ε' étant des fonctions qui s'évanouissent avec la différentielle de la variable indépendante, on déduit delà :

$$\frac{MM''}{MM'M''} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2+\varepsilon}}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2+\varepsilon'}}$$

d'où : $\lim \dfrac{MM''}{MM'M''} = 1$.

Ainsi, pour une courbe quelconque, la limite du rapport de la corde à l'arc est l'unité.

Théorème. Soit $MM'M''$ un arc de courbe plane ; aux extrémités de cet arc, menons les tangentes MI et $M''I$.

La limite du rapport $\frac{MM''}{MI+M''I}$ est l'unité.

Soit $M''IV=\omega$, le triangle MIM'' nous donnera :

$$\overline{MM''}^2=\overline{MI}^2+\overline{M''I}^2+2MI\cdot M''I\cos.\omega.$$
$$=(IM+IM'')^2-2MI\cdot M''I(1-\cos.\omega)$$
$$=(IM+IM'')^2-4IM\cdot IM''\sin^2 \tfrac{1}{2}\omega.$$

On peut écrire cette relation sous la forme :

$$\frac{\overline{MM''}^2}{(IM+IM'')^2}=1-4\,\frac{IM\cdot IM''}{(IM+IM'')^2}\sin^2 \tfrac{1}{2}\omega$$

Or, à mesure que l'arc MM'' diminue, ω tend vers zéro.

D'ailleurs il est facile de voir que le rapport $\frac{IM\cdot IM''}{(IM+IM'')^2}$ est toujours plus petit que 1, donc la différence $\frac{\overline{MM''}^2}{(IM+IM'')^2}-1$ peut devenir plus petite que toute quantité donnée, et par suite le théorème est démontré.

La conséquence presqu'immédiate, c'est que tout arc de courbe est la limite d'une ligne polygonale quelconque circonscrite, dont les diminuent indéfiniment, en même temps que leur nombre augmente au delà de toute limite.

Tangentes, normales et plans normaux aux courbes en coordonnées rectilignes.

Une tangente en un point d'une courbe est la position limitée d'une sécante tournant autour de ce point jusqu'à ce qu'une autre de ses intersections avec la courbe

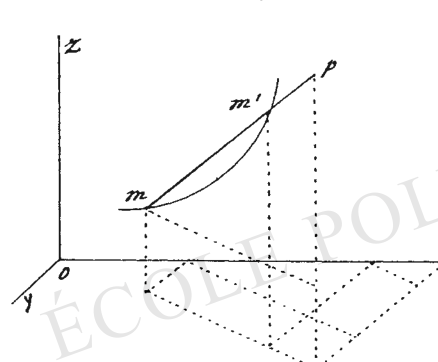
soit venu se réunir à lui.

Toute perpendiculaire à une tangente en un point d'une courbe est dite normale à la courbe en ce point.

On appelle enfin plan normal à une courbe en un point, le plan qui contient toutes les normales à cette courbe en ce point.

Proposons-nous de trouver l'équation de la tangente à une courbe en un point donné m.

Soient $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$, les coordonnées du point m ; $mm'p$ une sécante à la courbe passant par m ; $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, les coordonnées du point m', et enfin $\underline{x}', \underline{y}', \underline{z}'$ celles d'un point quelconque p appartenant à la sécante considérée.



La figure ci-jointe donne immédiatement :

$$mm' : mp :: \Delta z : z'-z :: \Delta x : x'-x :: \Delta y : y'-y$$

d'où :
$$x'-x = \frac{\Delta x}{\Delta z}(z'-z$$

$$y'-y = \frac{\Delta y}{\Delta z}(z'-z)$$

deux équations qui ne sont autre que celles de la sécante $mm'p$, puisqu'elles expriment deux des coordonnées d'un point quelconque p de cette ligne en fonction de la troisième. Supposons que le point m' sans quitter la courbe se rapproche indéfiniment du point m, $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ tendront

indéfiniment vers zéro, mais en même temps les rapports $\frac{\Delta x}{\Delta z}$, $\frac{\Delta y}{\Delta z}$ convergent respectivement vers les limites $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$; par conséquent

$$\left.\begin{aligned} x'-x &= \frac{dx}{dz}(z'-z) \\ \text{et}\quad y'-y &= \frac{dy}{dz}(z'-z) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

seront les équations de la tangente en m.

Il est clair qu'elles ne renferment aucune quantité qui ne puisse se déduire des équations de la courbe, car si $f(x,y,z)=0$ et $F(x,y,z)=0$ sont ces équations, on en peut conclure :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

et par suite les quantités $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$.

Mais il est plus facile d'arriver aux résultats que fournirait la substitution dans (1) des valeurs de $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ en observant d'une part que cette substitution revient à l'élimination entre les systèmes (1) et (2) des quantités dx, dy, dz, d'autre part que ces quantités elles-mêmes sont respectivement proportionnelles à $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$. Cette considération

conduit en effet promptement aux équations :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x'-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(y'-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(z'-z)=0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x'-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(y'-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(z'-z)=0 \quad (4).$$

pour celles de la tangente au point (x, y, z).

Ces équations représentent deux plans respectivement tangens aux surfaces $f(x, y, z)=0$, $F(x, y, z)=0$ en ce même point.

Pour le voir rappelons qu'un plan est dit tangent à une surface en un point donné quand il contient toutes les tangentes aux courbes tracées sur cette surface par le point en question, et cherchons à déterminer d'abord qu'un pareil plan existe généralement.

Soit $f(x, y, z)=0$ l'équation d'une surface. Toute courbe appartenant à cette surface sera déterminée par deux équations dont l'une sera nécessairement $f(x, y, z)=0$. Or, soit $F(x, y, z)=0$ la seconde équation d'une courbe située sur $f(x, y, z)=0$. La tangente en un point (x, y, z) de cette courbe aura pour équations (3) et (4). Mais quelque soit F, l'équation (3) ne change pas, donc la proposition est démontrée.

Remarquons toutefois que les raisonnemens par lesquels nous l'avons établie supposent essentiellement que les trois dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ ne soient pas ensemble nulles ou infinies.

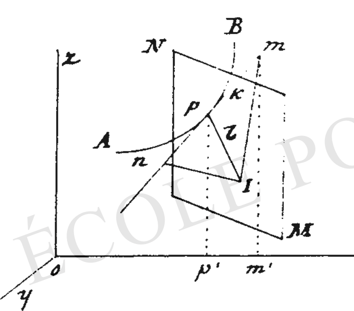
Cette détermination, du reste, nous fait voir que les équations (3) et (4) sont bien celles des plans tangens

au point (x, y, z), aux surfaces $f(x,y,z)=0$, $F(x,y,z)=0$

Cherchons maintenant l'équation du plan normal à une courbe en un point donné, en supposant les axes rectangulaires soient toujours $f(x,y,z)=0$ et $F(x,y,z)=0$ les équations de la courbe (x, y, z) les coordonnées du point donné.

Nous pourrions arriver au résultat en partant de la définition même du plan normal, et déduisant directement leur équation de celles (3) et (4) de la tangente au point (x, y, z). mais la méthode suivante est plus simple.

Admettons que AB soit la courbe représentée par les équations ci-dessus, p le point (x, y, z) m et n deux points pris sur la tangente à égale distance de p, MN le plan normal en question et I un point quelconque pris dans ce plan. Les équations de mn étant prises sous la forme (1) nous voyons que les coordonnées x', y', z',



d'un point m quelconque sur la tangente au point (x, y, z) se présentera sous les formes: $x'=x+\lambda\,dx$, $y'=y+\lambda\,dy$, $z'=z+\lambda\,dz$; et alors il est manifeste que celles x'', y'', z'' du point n symétrique de m par rapport à p auront pour expressions $x''=x-\lambda\,dx$, $y''=y-\lambda\,dy$, $z''=z-\lambda\,dz$.

Cela posé, appelons x_1, y_1, z_1, les coordonnées du point I, et exprimons que les deux distances Im, In sont égales, nous aurons une relation entre x_1, y_1, z_1,

laquelle sera vérifiée par les valeurs des coordonnées de tout point du plan normal ; ce sera, par suite l'équation demandée. Or

$$\overline{Im}^2 = (x'-x_1)^2 + (y'-y_1)^2 + (z'-z_1)^2$$
$$= (x-x_1+\lambda\, dx)^2 + (y-y_1+\lambda\, dy)^2 + (z-z_1+\lambda\, dz)^2$$
$$\overline{In}^2 = (x'-x_1)^2 + (y'-y_1)^2 + (z'-z_1)^2$$
$$= (x-x_1-\lambda\, dx)^2 + (y-y_1-\lambda\, dy)^2 + (z-z_1-\lambda\, dz)^2$$

Égalant les expressions de $\overline{Im}^2$ et $\overline{In}^2$, il vient toute réduction faite :

$$(x_1-x)\,dx + (y_1-y)\,dy + (z_1-z)\,dz = 0 \quad \text{ou}$$
$$(5) \qquad (x_1-x)\frac{dx}{dz} + (y_1-y)\frac{dy}{dz} + (z_1-z) = 0$$

pour l'équation du plan normal MN.

Si nous considérons cette équation sous la première forme, nous reconnaissons que son premier membre n'est autre chose que la différentielle changée de signe, de l'expression $\dfrac{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z'-z)^2}{2}$, dans laquelle on aurait regardé x, y, z, comme variables indépendantes. Mais cette expression est précisément celle de la distance en coordonnées rectangulaires des deux points (x_1, y_1, z_1), (x, y, z) ; Par conséquent, si par un point extérieur à une courbe on lui mène un plan normal, la distance de ce point à son intersection avec la courbe est un maximum ou un minimum de ses distances à cette courbe.

Théorème. — Soient α, β, γ, les trois angles que fait la ligne mpn avec les trois axes. Je dis que, s désignant l'arc Ap, $\cos.\alpha = \dfrac{dx}{ds}$, $\cos.\beta = \dfrac{dy}{ds}$, $\cos.\gamma = \dfrac{dz}{ds}$.

En effet, conservons les mêmes notations que ci-devant, soit $p'm'$ la projection de pm sur l'axe des x, nous aurons :

$$\cos.\alpha = \frac{p'm'}{pm} = \frac{\lambda dx}{\sqrt{\lambda^2(dx^2+dy^2+dz^2)}} = \frac{dx}{ds}$$

et de la même manière :

$$\cos.\beta = \frac{\lambda dy}{\sqrt{\lambda^2(dx^2+dy^2+dz^2)}} = \frac{dy}{ds}$$

$$\cos.\gamma = \frac{\lambda dz}{\sqrt{\lambda^2(dx^2+dy^2+dz^2)}} = \frac{dz}{ds}$$

ce qu'il fallait démontrer.

D'après cela, désignons par a, b, c, les trois angles de Ip avec les trois axes, par l la longueur Ip, il viendra $\cos.a = \frac{x_1-x}{l}$, $\cos.b = \frac{y_1-y}{l}$, $\cos.c = \frac{z_1-z}{l}$ et si nous divisons tous les termes de (5) par $l.ds$ cette équation prend la forme :

$$\frac{x_1-x}{l}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{y_1-y}{l}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{z_1-z}{l}\cdot\frac{dz}{ds} = 0$$

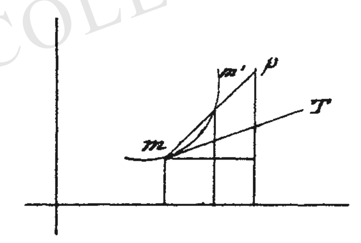
sous laquelle la propriété qu'a le plan normal d'être perpendiculaire à la tangente est mis en évidence.

Revenons un instant sur nos pas, pour obtenir l'équation d'une tangente à une courbe plane, en un point donné m.

On pourrait la déduire des équations (1), en supposant que le plan de cette courbe fut parallèle à celui des xy et supposant $z = z'$; mais il est plus simple de la chercher directement comme nous l'allons

faire

Soient x, y, z les coordonnées du point m, $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$, celles du point m'; x', y', z', celles d'un point p quelconque appartenant à la sécante mm'.



La figure ci-jointe donne immédiatement :

$mp : mm' :: x'-x : \Delta x :: y'-y : \Delta y$

d'où : $y'-y = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}(x'-x)$.

équation de la sécante $mm'p$, puisqu'elle exprime une des coordonnées d'un point quelconque p de cette ligne en fonction de l'autre. Supposons que le point m' sans quitter la courbe se rapproche indéfiniment du point m, $\Delta x, \Delta y$, tendront indéfiniment vers zéro, mais en même temps leur rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ converge vers la limite $\dfrac{dy}{dx}$; par conséquent :

$$y'-y = \frac{dy}{dx}(x'-x) \quad (6)$$

est l'équation de la tangente en m.

Cette équation ne renferme aucune quantité qui ne puisse être calculée au moyen de l'équation de la courbe, car si $f(x,y)=0$ est son équation, on aura :

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

et par suite $\dfrac{dy}{dx}$.

Mais il est plus simple, pour arriver aux mêmes résultats que par cette substitution, d'observer que les

quantités dx et dy sont proportionnelles respectivement à $x'-x$ et $y'-y$, car alors on trouve de suite :

$$\frac{df}{dx}(x'-x)+\frac{df}{dy}(y'-y)=0,$$

pour l'équation de la tangente au point (x,y).

En supposant les axes rectangulaires on conclut de l'équation (6) la suivante :

$$y'-y=-\frac{dx}{dy}(x'-x)$$

pour la normale au point (x,y) à la courbe considérée. Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$(y'-y)\,dy+(x'-x)\,dx=0 \quad (7).$$

Or, son premier membre est la différentielle de l'expression $\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2}$, dans laquelle on considère $\underline{x}$ et $\underline{y}$ comme des variables indépendantes ; mais $(x'-x)^2+(y'-y)^2$ est précisément l'expression en coordonnées rectangulaires de la distance des points (x',y') (x,y). Par conséquent nous avons ce théorème :

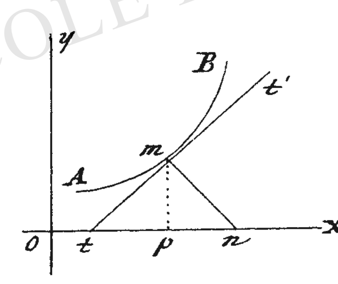
Si par un point extérieur à une courbe on lui mène une normale, la distance de ce point au pied de la normale est un maximum ou un minimum de ses distances à cette courbe.

On aurait encore pu obtenir l'équation (7) de la normale par des considérations analogues à celles qui nous ont conduit plus haut à l'équation du plan normal. Il est inutile de refaire ce calcul.

Outre les tangentes et les normales on considère encore dans les courbes planes certaines lignes dont la valeur varie avec la nature des systèmes des coordonnées, ou avec sa position par rapport à la courbe.

Donnons leurs définitions et leurs expressions pour les courbes rapportées à des coordonnées rectilignes.

Dans une courbe AmB rapportée à deux axes ox, oy, soient t et n les intersections avec l'axe ox de la tangente tmt' et de la normale nm au même point m; p le pied de l'ordonnée de ce point; tm et mn sont respectivement dites les longueurs de la tangente et de la normale, tp et np la sous tangente et la sous normale du point m.



Pour calculer les expressions de ces diverses longueurs, supposons les axes rectangulaires et désignons par x et y les coordonnées du point m. Le triangle mtp nous donne :

$$pt = mp \cot g \; mtp = y\frac{dx}{dy}$$

$$tm = \sqrt{\overline{mp}^2+\overline{tp}^2} = y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

le triangle mpn donne de même :

$$np = mp \, tg.\, pmn = y\frac{dy}{dx}$$

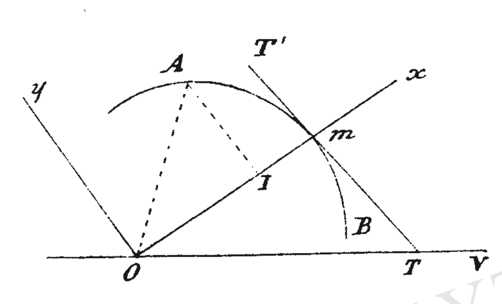
$$mn = \sqrt{\overline{np}^2+\overline{mp}^2} = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Ce sont les résultats que nous voulions trouver. Ils ne contiennent de quantité qui ne soit pas immédiatement connue que les rapports $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dy}$; mais ces rapports sont l'un et l'autre faciles à déduire de l'équa-

-tion de la courbe.

Des tangentes et normales aux courbes planes en coordonnées polaires.

Considérons une courbe AmB quelconque dont l'équation en coordonnées polaires soit $f(r, \theta) = 0$. Soit O l'origine des rayons vecteurs, OV l'axe polaire, m un point dont les coordonnées sont r, θ; proposons nous de déterminer la tangente mT à la courbe en ce point. — Pour y arriver



on a l'habitude de chercher l'une des lignes trigonométriques de l'angle OmT que fait la portion mT de la tangente avec le rayon vecteur Om; et il est évident que cet angle étant connu, la tangente se trouve parfaitement fixée de position.

Cette recherche peut s'effectuer par diverses méthodes. Nous en exposerons quelques unes.

1ère Méthode. Par le pole menons deux lignes indéfinies ox et oy perpendiculaires entre elles et dont l'une ox passe par le point m. Soit $F(x, y) = 0$ l'équation de la courbe AmB rapportée à ces lignes comme axes de coordonnées. Nous aurons $\operatorname{tg} T'mx = \frac{dy'}{dx'}$,

y' et x' étant les coordonnées du point m; mais $omT = T'mx$, donc aussi $\operatorname{tg}. omT = \frac{dy'}{dx'}$.

Or, soient r et θ les coordonnées polaires d'un point A quelconque de la courbe, x et y les coordonnées rectilignes du même point, le triangle A O P, nous donne

$$y = r\sin.(\theta-\theta') \quad x = r\cos.(\theta-\theta')$$

et par suite :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r\cos.(\theta-\theta')\,d\theta + dr\sin.(\theta-\theta')}{dr\cos.(\theta-\theta') - r\sin.(\theta-\theta')\,d\theta}$$

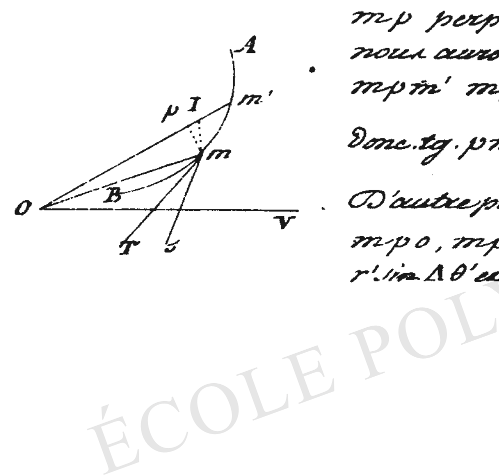
$$= \frac{r\cos(\theta-\theta')\frac{d\theta}{dr} + \sin(\theta-\theta')}{\cos.(\theta-\theta') - r\sin.(\theta-\theta')\frac{d\theta}{dr}}$$

Nous concluons delà dans l'hypothèse $\theta = \theta'$

$$\frac{dy'}{dx'} = tg.\ omT = r'\frac{d\theta'}{dr'}$$

en admettant toutefois que $\frac{d\theta'}{dr'}$ soit une quantité finie, ce qui aura lieu le plus souvent.

2ème Méthode. Considérons un point m' très voisin du point m, la ligne smm' qui joint ces deux points. Appelons r' et θ' les coordonnées du point m, $r'+\Delta r'$, $\theta'+\Delta\theta'$ celles du point m', et du point m, abaissons



mp perpendiculaire sur om' nous aurons dans le triangle mpm' $mp = pm'tg.\,pm'm$

donc $tg.\,pm'm = \frac{mp}{pm'}$.

D'autre part, dans le triangle mpo, $mp = mo\sin.mop = r'.\sin\Delta\theta'$ et $m'p = m'o - po$.

Mais d'après un lemme démontré précédemment $op = mo + \varepsilon\Delta\theta'$, ε étant une quantité qui s'évanouit avec $\Delta\theta'$, par conséquent aussi $m'p = m'o - mo - \varepsilon\Delta\theta'$ $= \Delta r' - \varepsilon\Delta\theta'$.

Nous concluons delà :

$$tg.\, pm'm = \frac{r\sin.\Delta\theta'}{\Delta r' - \varepsilon\Delta\theta'} = \frac{r'\dfrac{\sin.\Delta\theta'.\ \Delta\theta'}{\Delta\theta'\ \ \Delta r'}}{1 - \varepsilon\dfrac{\Delta\theta'}{\Delta r'}}$$

$$lim.\, tg.\, pm'm = r'\frac{d\theta'}{dr'}.$$

Or, $lim.\, pm'm = omT$. Donc $tg.\, omT = r'\dfrac{d\theta'}{dr'}$.

Cette démonstration suppose comme la précédente que $\dfrac{d\theta'}{dr'}$ soit une quantité finie.

3ème Méthode. Cette méthode n'est qu'un abrégé de la précédente; elle n'en diffère que parce qu'on y confond la perpendiculaire mp avec l'arc de cercle mI décrit du point o comme centre avec om pour rayon; l'angle $\Delta\theta'$ étant supposé assez petit pour que cette hypothèse soit permise, on obtient immédiatement dans le triangle mIm'

$$tg.\ mm'I = \frac{mI}{Im'} = r'\frac{\Delta\theta'}{\Delta r'}$$

$$\text{et } tg.\, omT = lim.\, tg.\, om'm = r'\frac{d\theta'}{dr'}$$

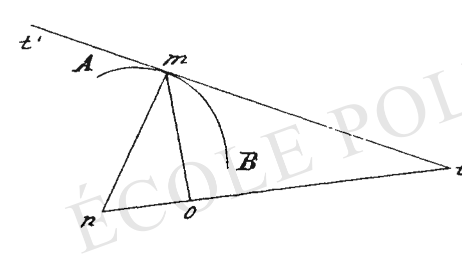
Les trois méthodes que nous venons d'exposer semblent exclure l'hypothèse $\dfrac{d\theta'}{dr'} = \infty$. Mais il est bien évident, par la raison de continuité que la formule

$tg.\, om'm = r'\dfrac{d\theta'}{dr'}$ est applicable à ce cas limite, aussi bien qu'à tous les autres.

Après ce qui nous venons de dire de la tangente, il ne nous reste rien à ajouter sur la manière de déterminer la normale, puisque ces deux lignes sont perpendiculaires entr'elles et ont un point commun.

On considère aussi dans les courbes rapportées à des coordonnées polaires, certaines lignes dont la valeur varie avec la position du pole par rapport à la courbe. Nous en dirons un mot.

Dans une courbe AmB rapportée au point o pour pole, joignons un point quelconque m au point o et élevons $t\,o\,n$ perpendiculaire à om; soient t et n les intersections avec $t\,o\,n$ de la tangente $t\,m\,t'$ et de la normale $m\,n$ au même point m, mt et $n\,m$ sont dites les longueurs de la tangente et de la normale, ot et no la sous-tangente et la sous-normale du point m.



Les expressions de ces diverses lignes sont faciles à trouver. Ce sont, en appelant $\underline{r}$ et $\underline{\theta}$ les coordonnées du point m:

$$ot = r^2\frac{d\theta}{dr},\quad on = \frac{dr}{d\theta},\quad mt = \sqrt{r^2 + r^4\frac{d\theta^2}{dr^2}},\quad mn = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}$$

Des arcs de courbure en coordonnées polaires.

Nous avons défini plus haut ce qu'on entendait par longueur d'un arc de courbe, et nous avons trouvé sa différentielle, en supposant variable une seule de ses extrémités, dans le cas d'une courbe rapportée à des coordonnées rectilignes. Faisons la même chose pour une courbe rapportée à des coordonnées polaires.

1ère Méthode. Soit $f(r,\theta)=0$ l'équation de la courbe; par le pole élevons une perpendiculaire à l'axe polaire et regardons la comme l'axe des y d'un système de coordonnées rectilignes dans lequel l'axe polaire serait axe des x; soit $F(x,y)=0$ l'équation de cette courbe rapportée à ce système de coordonnées. Appelons s un arc pris sur elle, dont l'une des extrémités seule pourra varier, x et y les coordonnées de cette extrémité, nous aurons :

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

D'ailleurs, x et y sont liés à r et θ par les relations

$$y=r\sin.\theta\ ,\quad x=r\cos.\theta$$

d'où :
$$dy=r\cos.\theta\, d\theta+\sin.\theta\, dr$$
$$dx=-r\sin.\theta\, d\theta+\cos.\theta\, dr$$

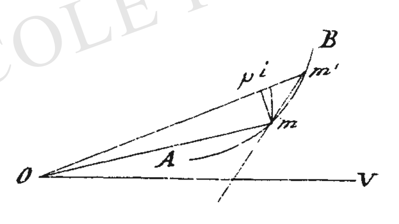
et par suite $dy^2+dx^2=dr^2+r^2d\theta^2$.

Donc, r et θ étant les coordonnées de l'extrémité variable d'un arc s,

$$ds=\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}.$$

2ème Méthode. Soient toujours $f(r,\theta)=0$ l'équation de la courbe AmB, m l'extrémité variable d'un arc s

considéré sur cette courbe; r et θ ses coordonnées, m' un point voisin de m $r+\Delta r$, $\theta+\Delta\theta$, ses coordonnées, Δs l'arc mm'; nous aurons dans le triangle $m'om$



$$\overline{mm'}^2 = \overline{mo}^2 + \overline{m'o}^2 - 2\,mo.m'o\cos.mom'$$
$$= r^2+(r+\Delta r)^2 - 2r(r+\Delta r)\cos.\Delta\theta$$
$$= (\Delta r)^2 + 2(r^2+r\Delta r)(1-\cos\Delta\theta)$$

d'où $$\frac{\overline{mm'}^2}{(\Delta\theta)^2} = \left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)^2 + 2(r^2+r\Delta r)\frac{1-\cos.\Delta\theta}{(\Delta\theta)^2}$$

D'ailleurs quand $\Delta\theta$ diminuera indéfiniment, Δr diminuera de même, et ces deux quantités seront nulles en même temps; mais on sait que pour $\Delta=0$ la limite de $\frac{1-\cos\Delta\theta}{(\Delta\theta)^2}$ est $\frac{1}{2}$;

donc $$\lim.\frac{mm'}{(\Delta\theta)^2} = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2$$

or, $\frac{mm'}{\Delta\theta} = \frac{mm'}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta\theta}$; partant $\lim.\frac{mm'}{\Delta\theta} = \lim.\frac{\Delta s}{\Delta\theta}$ ou $\frac{ds}{d\theta}$, et il vient ainsi en définitive

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \frac{dr^2}{d\theta^2} + r^2.$$

d'où : $ds = \sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}.$

3.e Méthode. Considérons toujours un point m' sur la courbe très voisine de m, et conservons les mêmes notations que dans la méthode précédente. Supposons de plus $\Delta\theta$ assez petit pour que l'arc Δs et l'arc de cercle mI décrit du pôle comme centre avec r comme rayon puisse se confondre sensiblement avec la corde mm' et

la perpendiculaire mp abaissée du point m sur Om'; nous aurons alors dans le triangle $m'mI$:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta r)^2 + r^2(\Delta\theta)^2$$

d'où : $$\left(\frac{\Delta s}{\Delta\theta}\right)^2 = \left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)^2 + r^2.$$

Cette relation devient à la limite $\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2$

et donne : $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$.

La validité de cette méthode repose sur le théorème suivant :

Quand deux quantités A et B infiniment petites toutes deux du même ordre par rapport à la même quantité φ, sont égales, les coefficients des puissances de φ qui marquent leurs degrés d'infiniment petits sont aussi égaux.

En effet, soit $A = (P+\varepsilon)\,\theta\,\varphi^m$

$$B = (P_1 + \varepsilon_1)\,\varphi^m$$

P et P_1 étant des quantités indépendantes de φ, ε et ε_1 des quantités infiniment petites avec φ, nous aurons

$$(P-P_1)\varphi^m + (\varepsilon - \varepsilon_1)\varphi^m = A - B = 0$$

ou en divisant par φ^m

$$P - P_1 + \varepsilon - \varepsilon_1 = 0$$

Cette relation nous prouve que s'il pouvait exister entre P et P_1 une différence, cette différence devrait s'annuler en même temps que φ ; mais P et P_1 sont indépendants de φ, donc $P = P_1$.

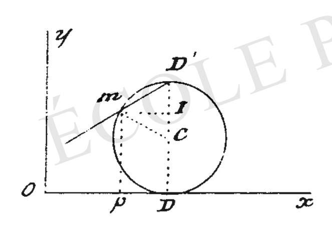
Additions relatives aux tangentes et normales.

Quand un point est lié à une circonférence de rayon constant, et que cette circonférence roule sans glissement sur une droite fixe, ce point décrit une courbe qu'on appelle cycloïde.

Suivant que le point décrivant est à l'extérieur, à l'intérieur, ou sur la circonférence du cercle mobile, la cycloïde qu'il engendre est dite rallongée, raccourcie ou simple.

Considérons en particulier les cycloïdes simples, et proposons nous de leur mener une tangente par un point pris sur elle. Diverses méthodes peuvent être employées avec succès; en voici quelques unes.

1ère Méthode. Soit Ox la droite fixe, DmD' la circonférence mobile, m la position correspondante du point décrivant. La courbe aura évidemment des points situés sur la ligne Ox. Prenons l'un de ces points pour origine des coordonnées, pour axe des x la ligne Ox, et Oy perpendiculaire à Ox pour axe des y.



Désignons par $\underline{x}$ et $\underline{y}$ les coordonnées du point m, par $\underline{r}$ le rayon de notre circonférence, et par $\underline{\theta}$ l'angle mCD des deux rayons partant de son centre pour aboutir d'une part au point m et d'autre part à son contact D avec Ox. Prolongeons enfin CD jusqu'à sa seconde rencontre D' avec la circonférence mobile et par le point m menons parallèlement à Ox la ligne mI.

Cela posé, d'après les données de la question la distance OD est nécessairement égale à l'arc mD ou bien à ces

arc augmenté d'un certain nombre de fois la circonférence à laquelle il appartient et nous aurons
$oD = r(\theta + 2k\pi)$. D'ailleurs la figure ci-jointe nous donne

$$y = ID = CD + IC = r + r\cos.(180^\circ - \theta) = r(1 - \cos.\theta)$$
$$x = oD - pD = oD - mI = r(\theta + 2k\pi - r\sin.\theta).$$

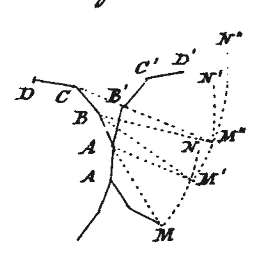
Par suite nous pourrons facilement obtenir le coefficient angulaire de la tangente mT du point m. Il résulte en effet des expressions ci-dessus des coordonnées du point m

$$dy = r\sin.\theta\, d\theta$$
$$dx = r\, d\theta - r\cos.\theta\, d\theta$$

puis $$\frac{dy}{dx} = \frac{r\sin.\theta}{r - r\cos.\theta} = \frac{\sin.\theta}{1 - \cos.\theta} = \text{cotg.}\,\tfrac{1}{2}\theta.$$

Cette formule simple conduit à une élégante construction de la tangente mT. Joignons le point m au point D', l'angle $mD'D$ sera $\frac{1}{2}\theta$, partant l'angle $D'mI$, $90^\circ - \frac{1}{2}\theta$; mT sera donc le prolongement de mD' puisque ces deux lignes ont un point commun et font le même angle avec l'axe des x

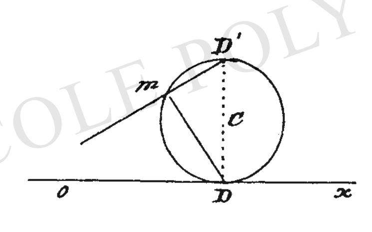
2ème Méthode. Cette seconde manière détermine la position de la tangente au moyen de celle de la normale. Elle exige le théorème préliminaire ci-après :



Quand deux courbes sont situées dans le même plan et que l'une roule sur l'autre, la ligne qui joint leur contact avec un point invariablement fixé à la courbe mobile est normal au lieu que décrit ce point.

Pour le prouver, considérons d'abord deux polygones RABCD, RAB'C'D' à côtés respectivement égaux, situés dans le même plan, et dont le second roule sur l'autre de manière à faire coïncider successivement les divers côtés RA, AB', B'C',.. avec RA, AB, BC,.. Pendant que les deux côtés confondus suivant RA se détachent, le mouvement de rotation a lieu autour du point fixe A, et un point quelconque M lié invariablement au polygone mobile décrit un arc de cercle MM'N dont le rayon est MA ; mais aussitôt que AB' est réuni avec AB, c'est autour du point fixe B que s'exécute le mouvement de rotation, et alors le point M arrivé en M' décrit un nouvel arc de cercle M'M''N' dont le rayon est M'B ; puis, en continuant de la sorte, on voit que le point M trace une courbe discontinue, composée d'arcs de cercle de rayons inégaux, mais telle que la ligne MA lui sera normale au point M. Or, il est évident que cette propriété subsistera toujours, quelle que soit la grandeur des côtés et des angles des deux polygones : seulement, à mesure que les angles augmentent et que les côtés décroissent, les arcs MM', M'M'',... diminuent de longueur, et deux rayons consécutifs sont plus près d'être égaux, ce qui rapproche de plus en plus la ligne MM'M''... d'une courbe continue. Donc, puisque dans toutes ces variations, les lignes telles que AM sont normales au lieu du point M. Il en sera encore de même, à la limite, quand les deux polygones seront devenus deux courbes quelconques.

Avec ce théorème. La construction de la tangente à la cycloïde ne saurait présenter aucune difficulté;

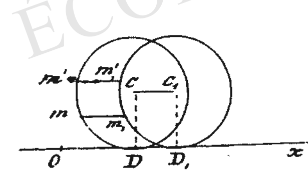


car, soit m le point décrivant, D le contact de la circonférence mobile avec la droite fixe Ox, DD' le diamètre qui passe par ce point, Dm sera normale à la courbe en m, et par suite $D'm$ sera sa tangente au même point.

Avant de passer à l'exposé d'une troisième méthode quelques remarques sur le mode de génération de la cycloïde sont nécessaires.

Soit Ox la droite fixe, CD une des positions du cercle mobile, m le point correspondant de la cycloïde.

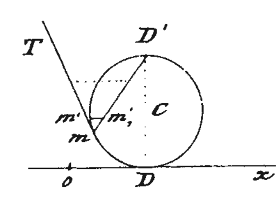
Faisons tourner le cercle CD autour de son centre, de manière que le point m vienne en m' par exemple et par le point m' menons $m'm'_1$ parallèle à Ox et égale en longueur à l'arc mm'; si l'on est allé de m en m' et de m' en m'_1, dans le même sens par rapport au roulement des cercles CD, le point m'_1 appartiendra à la cycloïde lieu du point m.



En effet, si l'on transportait le cercle CD parallèlement à lui-même de telle sorte que son centre décrivît sur une parallèle à Ox une longueur CC_1 égale à l'arc mm', le point m' viendrait en m'_1; mais, sans aucun doute, la somme de ces mouvemens égaux de rotation autour de son centre et de translation parallèlement à Ox du cercle CD, équivaut au mouvement composé que nous avons supposé qu'il prît dans la définition donnée des cycloïdes. Donc le point m'_1 se trouve bien

sur la cycloïde engendrée par le point m, et il correspond à une position du cercle mobile telle que
$DD_1 = CC_1 = mm'$.

3ème Méthode. Soit m un point de la cycloïde, mT la tangente au cercle mobile en m. Cette tangente ayant un élément rectiligne commun avec la circonférence, un point m' pris sur elle, dans le sens de son roulement, et très voisin de m, pourra être considéré comme appartenant aussi à la tangente mT. D'après ce qui précède,



pour obtenir le point de la cycloïde correspondant au point m', il suffira de mener $m'm'_1$ parallèle à Ox et égale à mm'; mais dans le triangle infinitésimal $m\,m'm'_1$ ainsi formé, $m\,m'_1$ est manifestement un élément de la cycloïde. Donc la direction $m\,m'_1$ est précisément celle de la tangente à cette courbe au point m. Or, $m\,m'm'_1$ est un triangle isocèle; par suite la ligne $m\,m'_1$ passera par l'extrémité D' du diamètre qui va au point D, et nous sommes ainsi ramenés à la construction que nous avaient fourni les deux premières méthodes.

Mr Chasles a donné dans ces derniers temps une manière fort élégante pour trouver la tangente à un grand nombre de courbes. Elle repose sur les deux théorèmes qui suivent.

Théorème 1er. Soit m un point, qui décrit un lieu géométrique plan, considéré dans une certaine position, m' une nouvelle position de ce point, infiniment voisin de la première. Élevons en m la ligne

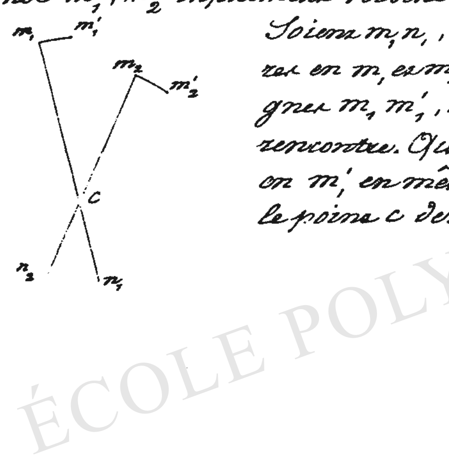
mp perpendiculaire sur mm' et prenons x y un point n que nous supposerons lié d'une manière invariable avec m. Quand m se trouvera en m', n sera venu par exemple en n' ; la ligne nn' est perpendiculaire à mp.



Pour le prouver, par les points m' et n menons des parallèles respectivement à mp et mm' ; appelons n'' leur intersection, $m'n''$ sera égale à mn. Mais à cause de la fixité des positions de m et n, $m'n'$ est aussi égal à mn ; par suite $m'n' = m'n''$.

Il résulte de là que les deux points n' et n'' sont sur une même circonférence décrite du point m' comme centre avec mn pour rayon. Or, m & m' étant supposés infiniment voisins l'un de l'autre, n' et n'' le sont pareillement et l'arc de cercle $n'n''$ se confond avec la tangente. Donc la proposition est vraie.

Corollaire — Considérons deux points m_1, m_2, décrivant chacun une courbe dans un plan qui les contienne à la fois, et fixés d'ailleurs invariablement entr'eux, dans une certaine position d'abord, puis dans une seconde m_1', m_2' infiniment voisine de la première.



Soient $m_1 n_1$, $m_2 n_2$ les perpendiculaires en m_1 et m_2 aux élémens rectilignes $m_1 m_1'$, $m_2 m_2'$, c leur point de rencontre. Quand le point m_1 viendra en m_1' en même temps que m_2 en m_2', le point c devrait d'après ce qui

précède, se mouvoir dans une direction perpendiculaire à la fois à $m_1 n_1$ et $m_2 n_2$, et cela sans sortir du plan de la figure; donc pendant la durée infiniment petite du parcours de $m_1 m_1'$ et $m_2 m_2'$ il restera en repos.

Théorème 2ème. — Imaginons trois points m, m_1, m_2 invariablement fixés de position l'un par rapport à l'autre; deux d'entr'eux m_1 et m_2 se mouvant ensemble suivant une certaine loi dans leur plan. Tous les trois décrivent des lieux géométriques. Les normales à ces lieux en des points obtenus en même temps se coupent en un même point.

Soient m, m_1, m_2, des positions simultanées, mais d'ailleurs quelconques des points générateurs des lieux en question, m', m_1', m_2', de nouvelles positions également simultanées des mêmes points générateurs, mais infiniment voisins des premiers.

$mn, m_1 n_1, m_2 n_2$ respectivement perpendiculaires à $mm', m_1 m_1', m_2 m_2'$ seront des normales à ces lieux et des normales telles que le suppose l'énoncé du théorème.

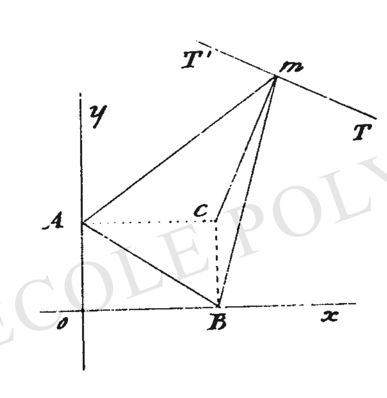
Appelons c, c_1, c_2 les intersections respectives de la première avec la seconde et la troisième, c celle des deux dernières. Si les trois points c, c_1, c_2 n'étaient pas confondus en un seul, nous aurions, en vertu du théorème précédent, deux points fixes sur chacune des normales considérées pendant la durée infiniment

petites des mouvemens de m en m', m_1 en m'_1, m_2 en m'_2, ce qui est impossible. Donc le théorème est démontré.

Ces principes posés, prenons une courbe engendrée de la manière que supposent les deux théorèmes ci-dessus. Pour leur mener une normale en un point, il suffira évidemment de déterminer la position du point c correspondant, de l'y joindre. La normale ainsi connue, on aura immédiatement la tangente.

Appliquons cette méthode à un exemple.

Étant donnés deux axes ox, oy faisant entre eux un angle quelconque et un triangle A m B, on demande de mener la tangente en un point du lieu que décrit le troisième sommet m de ce triangle, quand les deux autres A et B se meuvent chacun sur l'un des axes ox et oy.

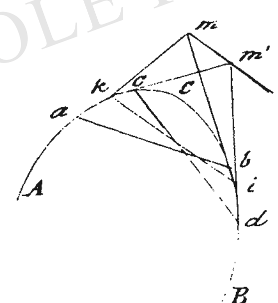


Soit A m B un des points de ce triangle. Aux points A et B élevons des perpendiculaires respectivement à ox et oy ; appelons c leur point de rencontre, joignons c m et menons m T perpendiculaire à c m, m T sera la tangente en m. Il serait facile de vérifier ce résultat par le calcul.

Avant d'abandonner le chapitre qui nous occupe, disons un mot encore d'une certaine classe de lignes auxquelles il est très simple de mener une tangente. Cette classe comprend les lieux engendrés par le sommet

d'un angle constant dont les deux cotés restent tangens à une courbe plane.

Soient m et m' deux points d'un pareil lieu voisins l'un de l'autre, ACB la courbe directrice, ma et mb ses tangentes partant du point m, m'c et m'd celles qui partent du point m', ab et cd les cordes de contact qui répondent respectivement à ces couples de tangentes, k et i les intersections de ma avec m'c et de mb avec m'd.

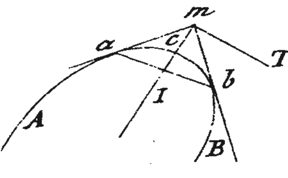


Joignons ki et sur la ligne ainsi faite décrivons un segment capable de l'angle constant amb; la corde mm' sera commune à ce segment et au lieu du point m, et cela, quelque près que m' puisse se trouver de m. Or, à mesure que m' se rapproche de m, ki converge vers une certaine position limite qui n'est autre que ab; de son coté, mm' tend à se confondre avec la tangente mT en m au segment capable de l'angle amb décrit sur ab comme corde. Donc la tangente en m au lieu de ce point m n'est autre chose que mT. De là une méthode très simple pour l'obtenir.

Donnons en une application.

Proposons-nous par exemple de mener une tangente à la courbe que décrit le sommet d'un angle droit circonscrit à une conique.

Soit ACB la conique, m un point du lieu, ma et mb les deux tangentes passant par ce point, I le milieu de leur corde de contact.



Joignons mI ; l'angle amb étant droit, I sera le centre du segment et par suite mT perpendiculaire à mI sera la tangente au point m.

Outre la tangente, la méthode nous fait connaître, dans ce cas particulier la nature du lieu du point m. En effet, d'après un théorème connu, si la conique a un centre, la ligne mI passera toujours par ce centre ; si elle n'en a pas, elle sera constamment parallèle à l'axe de la courbe. Mais toute courbe dans laquelle les normales concourent en un même point est une circonférence, ayant ce point pour centre ; toute courbe dans laquelle les normales sont parallèles est une droite perpendiculaire à leur direction commune. Donc, dans le premier cas le lieu est une circonférence concentrique à la conique, et dans le second c'est une perpendiculaire à son axe.

Des Asymptotes rectilignes des courbes planes.

Une droite est asymptote d'une courbe, quand, à partir d'un certain point pris sur l'une de ses branches, elle en approche d'une manière continue et indéfinie, mais sans pouvoir jamais l'atteindre.

Il résulte de cette définition, que pour qu'une courbe ait des asymptotes, il est nécessaire qu'elle ait des branches infinies.

Nous allons donner dans ce qui va suivre, les méthodes générales employées pour déterminer les asymptotes.

Considérons d'abord une courbe rapportée à des

coordonnées rectilignes.

Le caractère de toute asymptote non parallèle à l'axe des y, sera, d'après ce qui précède, que pour des abscisses suffisamment grandes, son ordonnée s'approche continuement et indéfiniment de l'ordonnée correspondante dans la courbe, de façon que la différence de ces deux ordonnées converge vers zéro à mesure que x converge vers l'infini.

Alors, $y = cx + d$ étant l'équation d'une pareille droite, celle de la courbe pourra se mettre sous la forme $y = cx + d + V$, en désignant par V une fonction, qui sans devenir imaginaire, tend vers zéro en même temps que x vers l'infini. On en conclut :

$$c = \frac{y}{x} - \frac{d+V}{x}$$

$$d = y - cx - V$$

et par suite, en supposant finie les valeurs de d,

$$c = \lim. \frac{y}{x}, \quad d = \lim. (y - cx)$$

pour $x = \infty$.

On voit par ces formules que les valeurs de c et d se présentent généralement sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$ et $\infty - \infty$; par suite leur détermination dépend d'une théorie déjà exposée. Quant aux asymptotes parallèles à l'axe des y, elles seront données par les valeurs finies de x auxquelles correspondent des valeurs de y, infinies et réelles ; par conséquent il sera toujours facile, au point de vue du moins de fixer leur position.

Arrivons aux courbes rapportées à des coordonnées polaires. Pour y trouver une asymptote, on cherche

d'abord une des valeurs de l'amplitude θ auxquelles correspondent des valeurs infinies du rayon vecteur r, et on a ainsi sa direction ; cela est parfaitement clair. Ensuite pour obtenir sa vraie position, on mène par le pole une ligne qui lui soit parallèle, et la limite vers laquelle converge l'expression de la distance d'un point de la courbe à cette parallèle à mesure que l'arc donne à θ des valeurs plus voisines de sa direction, est précisément la distance de l'asymptote à cette ligne.

Cette règle n'a pas besoin de démonstration.

Plans tangens et normales aux surfaces.

Nous avons dit plus haut ce qu'on entendait par plan tangent à une surface, et nous avons démontré qu'un pareil plan existait généralement.

Sans y revenir rappelons que le plan tangent à une surface $f(x,y,z)=0$ en un point (x,y,z) a pour équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x'-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(y'-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(z'-z)=0 \quad (1).$$

x', y', z', étant les coordonnées courantes.

On peut l'écrire encore sous la forme :

$$z'-z=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(x'-x)-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(y'-y)$$

$$\text{ou } z'-z=\frac{\partial z}{\partial x}(x'-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(y'-y) \qquad (2).$$

Pour s'en convaincre, il suffit dans l'équation $f(x,y,z)=0$

de regarder x et y comme seules variables indépendantes; alors en égalant à zéro les différentielles partielles de son premier membre, par rapport à x et par rapport à y, il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}dx = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}dy = 0$$

d'où :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Ces relations justifient bien la formule (2) de (1).

On appelle normale en un point d'une surface, la perpendiculaire au plan tangent en ce point.

Voyons comment on arrivera aux équations de la normale en un point (x, y, z) d'une surface $f(x, y, z) = 0$.

1ère Méthode — Dans l'équation (2) du plan tangent à cette surface en (x, y, z) posons $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, elle deviendra :

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y) \quad (3)$$

alors la normale devant passer par (x, y, z) et être perpendiculaire à ce plan, on aura immédiatement pour ses équations :

$$\begin{aligned} x' - x + p(z' - z) &= 0 \\ y' - y + q(z' - z) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

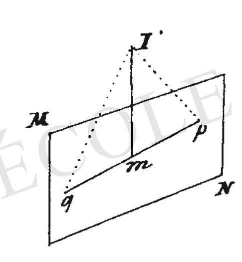
qui expriment que ses projections sur deux des plans coordonnées sont respectivement perpendiculaires aux traces de (2) sur les mêmes plans.

2ème Méthode — Cette seconde manière d'arriver aux équations (4) repose sur l'analogie frappante des deux relations

$$z'-z = p\,(x'-x) + q\,(y'-y)$$
$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Leur comparaison terme à terme fournit en effet ce théorème auquel nous aurons recours : Pour tout point (x', y', z') du plan tangent à une surface en (x, y, z), les différences $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ sont respectivement proportionnelles à dx, dy, dz.

Cela posé soient, MN un plan tangent à une surface, au point m, I un point quelconque (x_1, y_1, z_1), p et q deux points pris arbitrairement dans le plan MN, mais de telle sorte sorte toutefois que la ligne qui les unit passe en m et y ait son milieu. Joignons Ip, Iq, puis exprimons que ces deux distances sont égales, quelque direction qu'ait d'ailleurs la ligne pmq dans le plan MN ; nous obtiendrons ainsi deux relations entre x_1, y_1, z_1 qui ne seront autre que les résultats cherchés.



Or, d'après ce qui précède les coordonnées des points p seront de la forme $x+\lambda dx$, $y+\lambda dy$, $z+\lambda dz$ et par une conséquence nécessaire $x-\lambda dx$, $y-\lambda dy$, $z-\lambda dz$ seront alors celles du point q. Ainsi il viendra :

$$\overline{Ip}^2 = (x_1 - x - \lambda dx)^2 + (y_1 - y - \lambda dy)^2 + (z_1 - z - \lambda dz)^2$$
$$\overline{Iq}^2 = (x_1 - x + \lambda dx)^2 + (y_1 - y + \lambda dy)^2 + (z_1 - z + \lambda dz)^2$$
et par suite en égalant ces deux expressions, et réduisant:

$$(x_1 - x)\,dx + (y_1 - y)\,dy + (z_1 - z)\,dz = 0$$

Eu égard à l'identité $dz = p\,dx + q\,dy$.

Cette relation peut se mettre sous la forme:

$$\left[(x_1 - x) + p(z_1 - z)\right] dx + \left[(y_1 - y) + q(z_1 - z)\right] dy = 0$$

Mais elle doit avoir lieu quelle que soit la position de pmq dans le plan MN, c'est-à-dire, quelque soient dx, dy. Donc elle entraine nécessairement les deux suivantes:

$$x_1 - x + p\,(z_1 - z) = 0$$
$$y_1 - y + q\,(z_1 - z) = 0$$

qui ne sont autre que les équations de la normale en m, si on y regarde x_1, y_1, z_1, comme coordonnées courantes.

Les cosinus des angles que fait la normale en un point (x, y, z) ont des formes remarquables qu'il est bon de connaître. Appelons α, β, γ ces trois angles, respectivement avec les axes des x, des y et des z, nous aurons alors, d'après les formules connues de la Géométrie analitique:

$$\cos.\alpha = \mp \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$\cos.\beta = \mp \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$\cos.\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Si l'on observe que

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

on reconnait que ces expressions peuvent s'écrire ainsi qu'il suit :

$$\cos.\alpha=\pm\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos.\beta=\pm\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos.\gamma=\pm\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

Dans ces formules les signes supérieurs se correspondent ainsi que les signes inférieurs, et le radical doit toujours être pris avec le signe (+).

On déduit aisément de l'équation du plan tangent à une surface $f(x,y,z)=0$, celles de la courbe de contact d'un cône ou d'un cylindre circonscrits à cette surface, et celles même de ce cône et ce cylindre.

En effet, l'équation générale du plan tangent est (x,y,z) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x'-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(y'-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(z'-z)=0$$

Si on veut l'assujétir à passer toujours par un même point dont les coordonnées sont a, b, c, il faudra qu'il existe entre ses coefficiens la relation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(b-y) + \frac{\partial f}{\partial z}(c-z) = 0 \quad (5)$$

laquelle convient à tous les points d'une certaine surface et qui, avec l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente la courbe des contacts.

Si au lieu d'assujétir le plan tangent à passer par un point fixe, on lui impose la condition d'être constamment parallèle à une droite invariable $x' = az'$, $y' = bz'$, il faut que ce plan transporté à l'origine et dont l'équation devient alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' = 0$$

contienne la droite $x' = az'$, $y' = bz'$, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b + \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (6).$$

Cette équation de condition représente, si l'on y regarde x, y, z, comme coordonnées courantes, une surface dont l'intersection avec $f(x, y, z) = 0$ est la courbe de contact demandée.

D'après cela, si l'on veut avoir les équations mêmes du carré du cylindre circonscrit, rien de plus facile. Qu'on prenne les équations d'une de ses génératrices, qu'entre ces équations et celles de la courbe de contact correspondante, on élimine les coordonnées x, y, z des points de contact, on obtiendra évidemment le résultat cherché.

Revenons aux courbes de contact, et examinons en particulier le cas où $f(x, y, z)$ est algébrique et du degré m par exemple.

Alors il est bien évident que (6) est du degré $(m-1)$, et par conséquent la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à une surface algébrique se trouve toujours sur une autre surface algébrique d'un degré moindre d'une unité.

Le même théorème a lieu pour la courbe de contact d'un cône circonscrit à une surface algébrique; mais les équations de cette courbe ne le mettent pas en évidence.

Pour le démontrer, à l'équation (5) ajoutons $f(x, y, z) = 0$ multipliée par m, il nous viendra :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(b-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(c-z)+mf(x,y,z)=0 \quad (7).$$

ou $\frac{\partial f}{\partial x}a+\frac{\partial f}{\partial y}b+\frac{\partial f}{\partial z}c-\frac{\partial f}{\partial x}x-\frac{\partial f}{\partial y}y-\frac{\partial f}{\partial z}z+mf(x,y,z)=0.$

Cette équation avec $f(x,y,z)=0$ représente la courbe de contact considérée; son premier membre se compose de deux parties, l'une $a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}+c\frac{\partial f}{\partial z}$ évidemment du degré $(m-1)$, l'autre $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}-f(x,y,z)$ en apparence du degré m mais en réalité du degré $(m-1)$.

En effet : $f(x,y,z)$ étant du degré m, on peut écrire

$$f(x,y,z)=f_m+f_{m-1}+f_{m-2}+\dots+\dots+f_1+f_0$$

$f_m, f_{m-1}, f_{m-2}, \dots f_1, f_0$ étant des polynomes homogènes respectivement des degrés $m, m-1, m-2, \dots 1, 0$.

Il résulte de cette égalité

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z} = x\frac{\partial f_m}{\partial x}+y\frac{\partial f_m}{\partial y}+z\frac{\partial f_m}{\partial z}$$

$$+x\frac{\partial f_{m-1}}{\partial x}+y\frac{\partial f_{m-1}}{\partial y}+z\frac{\partial f_{m-1}}{\partial z}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\partial f_1}{\partial x}+y\frac{\partial f_1}{\partial y}+z\frac{\partial f_1}{\partial z}$$

$$= mf_m+(m-1)f_{m-1}+(m-2)f_{m-1}+\cdots+f_1$$

et par suite :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}-m\,f(x,y,z) = -f_{m-1}-2f_{m-2}\cdots(m-1)f_1-mf_0$$

l'on voit par là que le premier membre de (7) ne peut être que du degré $(m-1)$.

Donc la courbe de contact d'un cône circonscrit à une surface algébrique se trouve toujours sur une autre surface algébrique d'un degré moindre d'une unité.

Une question intéressante qui se rattache à celle que nous venons de traiter est la recherche des conditions pour que deux surfaces se coupent à angle droit en un point donné. Donnons en la solution.

Soient $f(x,y,z)=0$ et $\varphi(x,y,z)=0$ les equations de deux surfaces, x, y, z un point qui leur soit commun. Pour que ces deux surfaces s'y coupent à angle droit, il faut et il suffit que leurs plans tangents en ce point soient

perpendiculaires entr'eux. Or, les équations de ces plans tangens sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x'-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(y'-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(z'-z)=0$$

pour la première surface

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x'-x)+\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y'-y)+\frac{\partial \varphi}{\partial z}(z'-z)=0$$

pour la seconde,

Donc, en vertu des formules connues de la Géométrie aux trois dimensions, la condition cherchée est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0$$

Comme application, soit

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}-1=0 \qquad (8)$$

$$\varphi(x,y,z)=\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}-1=0. \qquad (9).$$

nous aurons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{\rho^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{\rho^2-b^2},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{2z}{\rho^2-c^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{2x}{\lambda^2},\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{2y}{\lambda^2-b^2},\quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}=\frac{2z}{\lambda^2-c^2}$$

et par suite la condition qui devrait vérifier les coordonnées x, y, z, d'un point commun aux surfaces (8) et (9) pour que ces surfaces s'y coupent à angle droit sera :

$$\frac{x^2}{\rho^2\lambda^2}+\frac{y^2}{(\lambda^2-b^2)(\rho^2-b^2)}+\frac{z^2}{(\lambda^2-c^2)(\rho^2-c^2)}=0 \qquad (10)$$

Or, retranchons (8) et (9) membre à membre, il viendra :

$$x^2\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{\rho^2-b^2}-\frac{1}{\lambda^2-b^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{\rho^2-c^2}-\frac{1}{\lambda^2-c^2}\right)=0.$$

Cette relation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{x^2}{\rho^2\lambda^2}+\frac{y^2}{(\rho^2-b^2)(\lambda^2-b^2)}+\frac{z^2}{(\rho^2-c^2)(\lambda^2-c^2)}=0,$$

et l'on voit que la condition (10) est une conséquence des équations (8) et (9). Concluons de là que les surfaces qu'elles représentent se coupent toujours à angle droit.

Si dans (8) et (9) on fait varier les constantes ρ, λ, on obtiendra une infinité de surfaces que Mr. Chasles a nommées homofocales, et dont il a étudié les propriétés avec un soin extrême. Ce n'est pas ici le lieu d'en parler.

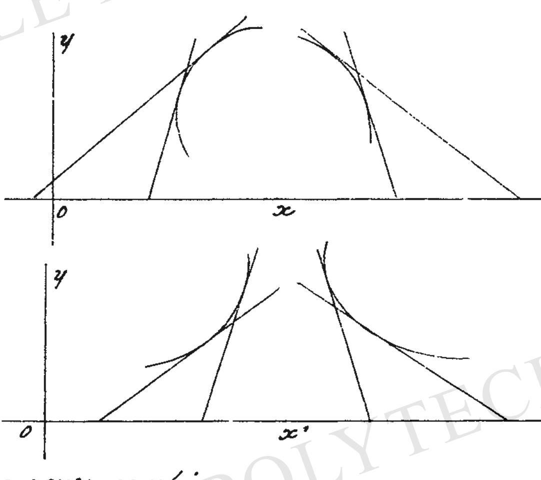
Concavité et Convexité. — Inflexions.

Par rapport à une droite donnée, une courbe est dite concave en un point, quand, aux environs de ce point, elle est comprise dans l'angle aigu que forme sa tangente avec cette droite. Elle est au contraire dite convexe, quand, dans les mêmes circonstances, elle se trouve en dehors de cet angle.

Supposons que la droite dont il s'agit soit l'axe des x du système de coordonnées rectangulaires auquel est rapportée une courbe, et proposons-nous de trouver les caractères analytiques auxquels on pourra reconnaître en quels points cette courbe est concave, en quels points elle est convexe.

Deux méthodes distinctes sont employées pour résoudre ce problème ; nous les exposerons successivement.

1ère Méthode. Soient ox et oy les axes ; considérons d'abord un point dont l'ordonnée soit positive.



Il est clair, à l'inspection des figures ci-contre, qu'aux environs de ce point, le coefficient angulaire de la tangente est une fonction de x croissante ou décroissante, selon que la courbe y est convexe ou concave, et réciproquement.

En considérant un point dont l'ordonnée fut au contraire négative on verrait de même qu'aux environs de ce point le coefficient angulaire de la tangente est une fonction de x croissante ou décroissante selon que la courbe y est concave ou convexe.

Si l'on observe que $\frac{\partial y}{\partial x}$ est l'expression analytique de ce coefficient angulaire, et que par suite $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ est sa dérivée première, on déduit aisément de ces deux conclusions la règle unique ci-après :

En un point (x, y), une courbe est convexe ou concave vers l'axe des x, suivant que $y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ est positif ou

ou négatif.

2e Méthode. — Cette seconde manière d'arriver aux conditions demandées est une conséquence presqu'immédiate des définitions posées ci-dessus.

Il en résulte en effet que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe soit convexe ou concave en un de ses points, c'est que dans ses environs, l'ordonnée de la courbe soit une valeur absolue, plus grande ou plus petite que l'ordonnée correspondante de la tangente en ce point.

Cela posé, soient x', y' les coordonnées d'un point pris sur une courbe; h une quantité positive ou négative pouvant devenir moindre que toute quantité donnée, y et y_1 les ordonnées de la courbe, et de la tangente au point (x', y'), correspondant à l'abscisse $x = x + h$; nous aurons :

$$y = y' + h.\frac{\partial y'}{\partial x'} + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2} + \varepsilon\right) \text{ et } y_1 = y' + h\frac{\partial y'}{\partial x'}$$

on tire delà

$$y - y_1 = \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2} + \varepsilon\right).$$

Or, ε étant infiniment petit avec h, on peut prendre cette quantité assez peu différente de zéro pour que $\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2} + \varepsilon$ ou $(y - y_1)$ et $\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}$ reçoive le même signe, Donc :

Si y' est positif, la courbe sera convexe ou concave au point (x', y') suivant que $\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}$ sera positif ou négatif; et le contraire aura lieu si y' est négatif.

Delà la règle posée précédemment.

Dans l'une et l'autre de nos deux méthodes nous avons exclus, sans en prévenir, le cas particulier où les valeurs des coordonnées du point considéré réduiraient $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ à zéro, ou à l'infini. Revenons-y un instant.

Ce cas se partage tout naturellement en deux autres, savoir : Celui où la dérivée $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ change de signe en passant par zéro ou l'infini, et celui où elle n'en change pas.

Dans le premier les valeurs de x et y qui rendent $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nul ou infini rendent maximum l'expression $\frac{\partial y}{\partial x}$, et déterminent ce qu'on appelle un point d'inflexion, c'est-à-dire un point où le sens de la courbure de la courbe change. Alors le signe de $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ indique facilement de quelle manière s'effectue ce changement.

Dans le second, la théorie des contacts que nous exposerons plus loin, nous fait voir que la tangente à la courbe au point considéré a tout simplement avec elle un contact d'ordre pair.

Courbure des lignes planes.

La courbure d'une courbe, ou plutôt d'un arc de courbe est la quantité dont cette courbe a successivement dévié de la ligne droite dans l'étendue de cet arc.

Elle est évidemment mesurée par l'angle que font entr'elles les deux tangentes à ses extrémités, et quel l'on

nomme angle de contingence de cet arc.

Si l'on divise cet angle par la longueur de l'arc, on aura ce qu'on appelle la courbure moyenne de cet arc rapportée à l'unité de longueur.

La limite vers laquelle converge la courbe moyenne d'un arc de ligne courbe dont une des extrémités est fixe, à mesure que cet arc diminue, a reçu le nom de courbure de la ligne en ce point extrême.

Il résulte de cette définition que la courbure d'une ligne en un point pour lequel la tangente fait avec une droite fixe un angle α, a pour mesure $\lim. \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ ou $\frac{d\alpha}{ds}$, s désignant un arc arbitraire dont ce point est une extrémité.

Cela posé, soit $F(x,y)=0$ l'équation d'une courbe plane rapportée à deux axes rectangulaires, (x,y) un point pris sur elle, s un arc qui s'y termine et α l'angle que fait avec l'axe des x la tangente à la courbe en ce point, nous aurons évidemment

$$\alpha = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang.} = \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\text{d'où} \quad d\alpha = \frac{d\frac{dy}{dx}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2+dy^2}.$$

Si d'ailleurs on se rappelle que $ds = \sqrt{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, on reconnait que la courbure de la ligne $F(x,y)=0$ au point considéré est donnée par la formule :

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En supposant que x soit la variable indépendante et

faisant $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = q$, on donne à cette expression la forme ci-après :

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{q}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Faisons en l'application au cercle représenté par l'équation générale $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

Dans ce cas particulier nous aurons :

$$p = -\frac{x-a}{y-b}$$

$$q = -\frac{1}{y-b} - \frac{x-a}{(y-b)^2} \cdot \frac{x-a}{y-b} = -\frac{R^2}{(y-b)^2}$$

$$\text{et par suite } \frac{d\alpha}{ds} = \frac{-\frac{R^2}{(y-b)^3}}{\left(1+\frac{(x-a)^2}{(y-b)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{1}{R}$$

Le double signe du résultat auquel nous arrivons tient au double signe de la puissance $\frac{3}{2}$ qui se trouve au dénominateur de $\frac{d\alpha}{ds}$. Néanmoins ce calcul nous fait voir que la courbure d'un cercle est la même en tous ses points.

Le cercle jouissant seul de cette propriété, comme il est facile de s'en convaincre, il est naturel de le prendre pour terme de comparaison et de faire connaître la courbure d'une ligne en un de ses points en donnant le rayon du cercle dont la courbure est la même. Ce cercle se nomme *cercle de courbure* ou *cercle osculateur*, et son rayon rayon de courbure. Si on le place tangentiellement à la courbe au point que l'on considère, en tournant sa concavité du même côté qu'elle, son centre considéré relativement à ce point prend le nom de *centre de courbure*. Il suit immé-

-diatement de laquelle le rayon ρ de courbure au point (x, y) de la ligne $F(x, y)=0$ a pour expression

$$\rho = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x} \quad (1)$$

quand x ni y ne sont prises pour variable indépendante, ou bien encore

$$\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} \quad (2)$$

lorsque x est la variable indépendante.

Dans ces formules, il est clair qu'on devra prendre la puissance $\frac{3}{2}$ avec un signe tel que l'expression de ρ soit positive.

Défini comme nous l'avons fait ci-dessus, le centre de courbure de $F(x, y)=0$ s'obtiendra évidemment en portant sur la normale au point (x, y), à partir de ce point et dans l'intérieur de la courbe une longueur égale à ρ, mais au moyen de la formule (2), il est facile de voir que ce point n'est autre que l'intersection de cette normale avec une normale infiniment voisine.

Pour le prouver rappelons-nous que la normale en (x, y) a pour équation

$$x'-x+p(y'-y)=0 \quad (3).$$

Donnons à x un accroissement Δx, et appelons Δy et Δp les accroissements correspondants de y et p.

$$x'-x-\Delta x+(p+\Delta p)(y'-y-\Delta y)=0 \quad (4).$$

Sera l'équation de la normale au point $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Les valeurs de x' et y' vérifiant à la fois (3) et (4) ne sont autre chose que les coordonnées du point d'intersection des deux normales considérées.

Mais le système de ces deux équations peut être remplacé par l'une d'elles (3) par exemple et leur différence

$$-\Delta x - \Delta y\,(p+\Delta p) + \Delta p\,(y'-y) = 0.$$

D'ailleurs à cette dernière on peut substituer la suivante :

$$-1 - \frac{\Delta y}{\Delta x}\,p - \frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta p + \frac{\Delta p}{\Delta x}(y'-y) = 0 \quad (5)$$

Donc en définitive les coordonnées de l'intersection de (3) et (4) seront fournies par (3) et (5).

Ceci posé, admettons maintenant que Δx soit infiniment petit Δy et Δp le seront pareillement; par suite (5) prendra la forme :

$$-1 - p^2 + q\,(y'-y) = 0 \quad (6)$$

tandis que (3) ne changera pas, et il est clair que les valeurs de x' et y' vérifiant à la fois (3) et (6) seront les indices du point d'intersection de la normale en (x,y) avec une normale infiniment voisine.

Résolvons les par rapport à $y'-y$, et $x'-x$, il vient :

$$y'-y = \frac{1+p^2}{q} \qquad x'-x = -\frac{p\,(1+p^2)}{q} \quad (7)$$

d'où $\sqrt{(y'-y)^2+(x'-x)^2} = \dfrac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}.$

Cette relation démontre le théorème énoncé.

Dans les formules (7) x' et y' désignent, ainsi que nous venons de le prouver les coordonnées du centre de courbure de $F(x,y)=0$ pour le point (x,y), si en éliminant x et y entre l'équation de la courbe et ces relations (7) on obtiendrait une certaine équation $\varphi(x',y')=0$ représentant le lieu des centres de courbure de la ligne considérée. Ce lieu s'appelle la développée. Il jouit de propriétés remarquables que nous ferons connaître.

Avant d'y arriver disons que quand deux courbes sont, la première la développée de la seconde, réciproquement la seconde s'appelle la développante de la première.

Théorème. — Toute normale à la développante est tangente à la développée, et réciproquement.

Soit $F(x,y)=0$ l'équation de la développante, $\varphi(x',y')=0$ celle de la développée ; $\varphi(x',y')=0$ s'obtient ainsi que nous le savons, par l'élimination de x et y entre (7) et $F(x,y)=0$.

Sans effectuer l'élimination nous pourrons trouver $\frac{dy'}{dx'}$, une fonction de p.

Pour le faire de la manière la plus simple, observons que le système des équations (7) et $F(x,y)=0$ équivaut à celui de (3), (6) et $F(x,y)=0$, et de plus que x' et y' varient de même que y en même temps que x. Cela étant, différentions l'équation (3) par rapport à x, nous aurons :

$$dx'-dx+pdy'-pdy+q\,dx(y'-y)=0$$

ou $$\frac{dx'}{dx}-1+p\frac{dy'}{dx}-p\frac{dy}{dx}+q(y'-y)=0$$

ou encore $$\frac{dx'}{dx}+p\frac{dy'}{dx}=0$$

en ayant égard à (6).

Cette dernière relation établit le fait à prouver, car on en conclut $\frac{dy'}{dx'}=-\frac{1}{p}$.

Autre Théorème. — La différence des rayons de courbure de deux points d'une ligne $F(x,y)=0$ est égale à la longueur de l'arc de la développée $\varphi(x',y')=0$ compris entre les centres de courbure de ces points.

Imaginons qu'on ait pris un point fixe sur la développée

et soient x' et y' les coordonnées du centre de courbure d'un point (x, y) de $F(x, y) = 0$; ρ le rayon de courbure de la développante en ce point, s la longueur de l'arc de la développée compris entre (x', y') et le point fixe. La proposition serait évidemment démontrée si je pouvais faire voir que la somme $\rho + s$ est constante, autrement dit que $d(\rho + s) = d\rho + ds = 0$.

Pour y arriver observons que

$$\rho^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$$

y', x', y, variant avec x supposée variable indépendante, on conclut de là :

$$\rho d\rho = (x-x')(dx - dx') + (y-y')(dy - dy')$$

$$= (x-x')\,dx + (y-y')\,dy$$

$$- (x-x')\,dx' - (y-y')\,dy'$$

$$= -(x-x')\,dx' - (y-y')\,dy'$$

En vertu de la relation (3), qui existe nécessairement entre y', x', y, x.

Or, appelons α et α' les angles que fait la direction du rayon de courbure considéré avec les axes des x et des y nous aurons

$$\cos.\alpha = \frac{x-x'}{\rho} = \frac{dx'}{ds}, \quad \cos.\alpha' = \frac{y-y'}{\rho} = \frac{dy'}{ds}.$$

D'ailleurs il suit des équations précédentes :

$$d\rho = -\frac{x-x'}{\rho}dx' - \frac{y-y'}{\rho}dy'$$

Donc $$d\rho = -\frac{dx'^2 + dy'^2}{ds} = -ds$$

et par suite $d\rho + ds = d(\rho + s) = 0$.

ce qu'il fallait prouver.

Revenons à la théorie de la courbure des lignes.

Soient $F(x,y)=0$ et $\varphi(r,\theta)=0$ les équations d'une même courbe rapportée d'une part à des coordonnées rectilignes rectangulaires, d'autre part à des coordonnées polaires; supposons de plus que l'origine et l'axe des x du premier système coïncident respectivement avec le pole et l'axe polaire du second; désignons enfin par (x,y) et (r,θ) un même point de cette courbe, suivant que nous la regarderons comme rapportée à l'une ou à l'autre de ces systèmes de coordonnées.

Si nous appelons ρ le rayon de courbure, nous aurons, d'après ce qui précède, et quelle que soit la variable indépendante :

$$\rho = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Or, en vertu des conventions faites,

$$x = r\cos.\theta$$
$$y = r\sin.\theta$$

d'ailleurs r et θ sont liés entre eux par la relation $\varphi(r,\theta)=0$. Donc on peut considérer θ comme une variable indépendante dont x, y, et r seraient fonctions, et alors il vient :

$$dx = \cos.\theta\,dr - r\sin.\theta\,d\theta$$
$$dy = \sin.\theta\,dr + r\cos.\theta\,d\theta$$
$$d^2x = \cos.\theta\,d^2r - 2\sin.\theta\,dr\,d\theta - r\cos.\theta\,d\theta^2$$
$$d^2y = \sin.\theta\,d^2r + 2\cos\theta\,dr\,d\theta - r\sin.\theta\,d\theta^2.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression ci-dessus de ρ. Elle deviendra, toute réductions faites :

$$\rho = \frac{(dr^2+r^2d\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2d\theta^3+2dr^2d\theta-r\,d^2r\,d\theta}$$

C'est la formule du rayon de courbure d'une ligne polaire en

un de ses points (r, θ).

Il serait facile d'y arriver directement en partant de l'égalité $\rho = \frac{ds}{d\varepsilon}$, indépendante de toute hypothèse sur la nature des coordonnées. Nous ne ferons point ce calcul.

Passons de suite à la recherche des équations des développées et du rayon de courbure de quelques lignes remarquables.

Considérons d'abord la parabole.

Son équation étant $y^2 = 2\alpha x$, il vient en la différentiant deux fois par rapport à x supposé variable indépendante :

$$y\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Ces deux équations donnent, en conservant les notations employées dans l'exposé ci-dessus de la méthode générale :

$$p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\alpha}{y}$$

$$q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\alpha^2}{y^3}$$

et par suite $\rho = \frac{(y^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{+\alpha^2}$

Si l'on appelle N la normale à la parabole en (x, y) on a évidemment $y^2 + \alpha^2 = N^2$; donc aussi $\rho = \frac{N^3}{\alpha^2}$.

Cette valeur est très facile à construire géométriquement.

Maintenant dans les formules

$$y' - y = \frac{1 + p^2}{q} \quad x' - x = -\frac{p(1 + p^2)}{q}$$

Substituons à p et q les valeurs que nous venons d'établir, et nous aurons :

$$y'-y = \frac{1+\frac{a^2}{y^2}}{-\frac{a^2}{y^3}} = -\frac{(y^2+a^2)y}{a^2}$$

$$x'-x = -\frac{\frac{a}{y}\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)}{-\frac{a^2}{y^3}} = \frac{y^2+a^2}{a} = 2x+a$$

Résolues respectivement par rapport à y et x, ces deux équations donnent

$$y = -a^{\frac{2}{3}}\, y'^{\frac{1}{3}}$$

$$x = \frac{x'-a}{3}$$

Portons ces valeurs dans l'équation de la parabole, $y^2 = 2ax$ et nous aurons :

$$a^{\frac{4}{3}}\, y'^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\,(x'-a)$$

$$\text{ou} \qquad y'^2 = \frac{8}{27a}\,(x'-a)^3$$

pour équation de sa développée.

Considérons encore l'ellipse.

Son équation étant $a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2$, il vient en la différentiant deux fois par rapport à x supposée variable indépendante :

$$2a^2y\frac{dy}{dx} + 2b^2x = 0$$

$$2a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2a^2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2b^2 = 0.$$

ces deux équations donnent, en conservant les mêmes notations que pour la parabole :

$$p=\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$q=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{b^2}{a^2y}-\frac{b^4x^2}{a^4y^3}=-\frac{b^2}{a^4y^3}(a^2y^2+b^2x^2)=-\frac{b^4}{a^2y^3}$$

et par suite

$$\rho=\frac{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}{-\frac{b^4}{a^2y^3}}=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

Il est facile de voir qu'ici comme dans le cas de la parabole on a aussi en appelant N la longueur de la normale en (x,y) et P le paramètre $\frac{b^2}{a}$ de l'ellipse.

$$\rho=\frac{N^3}{P^2}$$

Cela posé, dans les formules

$$y'-y=\frac{1+p^2}{q}\quad x'-x=-\frac{p(1+p^2)}{q}$$

Substituons à p et q les valeurs que nous venons d'obtenir, nous aurons :

$$y'-y=\frac{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}{-\frac{b^4}{a^2y^3}}=-\frac{y(a^4y^2+b^4x^2)}{a^2b^4}$$

$$x'-x=\frac{-\frac{b^2x}{a^2y}\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)}{-\frac{b^4}{a^2y^3}}=\frac{x(a^4y^2+b^4x^2)}{a^4b^2}$$

Résolues par rapport à $\underline{x}$ et $\underline{y}$ ces équations donnent, en désignant par $\underline{c}$ l'excentricité de cette ellipse :

$$y=-\frac{b^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}y'^{\frac{1}{3}}$$

$$x=\frac{a^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}x'^{\frac{1}{3}}$$

Portons ces valeurs dans les relations $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, et nous obtiendrons enfin toute réduction faite :

$$b^{\frac{2}{3}}\,y'^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\,x'^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

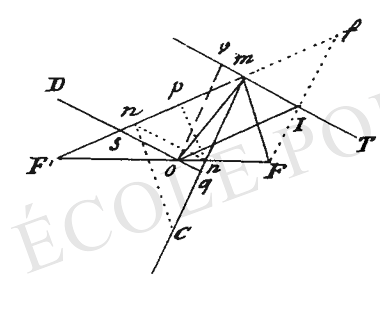
pour l'équation de la développée en question.

Reprenons la formule

$$\rho = \frac{N^3}{P^2}$$

Pour en déduire une autre, et la construction géométrique du centre de courbure en un point d'une ellipse.

Soient F et F' les deux foyers de notre ellipse, m le point considéré dont les coordonnées sont x y.



mT la tangente à la courbe en ce point, mn la normale v et q les projections du centre o sur cette tangente et cette normale, I la projection de F sur mT, oD le conjugué du diamètre om, prolongeons FI d'une quantité If = IF, le point f se trouvera sur le prolongement de F'm. Élevons en n, rn perpendiculaire sur mn, et en r, rc perpendiculaire sur F'm. appelons S le   de Dq et F'm, et enfin posons :

$mn = N$, $oD = D$, $om = B$, $Dom = \theta$, $ov = \pi$.

Les deux triangles Smq, mpn sont semblables, donc

$$mp : mn :: mq : mS.$$

Or, $mS = oI = a$; d'ailleurs $mn \cdot mq = b^2$.

Donc cette proportion donne :

$$mp = \frac{b^2}{a} = P.$$

Cela étant, il est clair que C est le centre de courbure de l'ellipse au point m ; en effet ce point est situé sur la normale m c d'une part, et d'autre part

$$mC = \frac{\overline{mn}^2}{N} = \frac{\frac{N^4}{P^2}}{N} = \frac{N^3}{P^2}$$

On déduit aisément de la figure ci contre une autre expression très simple du rayon de courbure.

En effet, d'après des théorèmes connus :

$$mn \, . \, mq = N\pi = b^2$$

$$oD \, . \, om \sin.\theta = D.\pi = ab$$

De ces deux égalités, élevons la seconde au carré et la première au cube, puis divisons-les membre à membre, il viendra :

$$\frac{D^2\pi^2}{N^3\pi^3} = \frac{a^2b^2}{b^6}$$

$$\text{ou } \frac{D^2}{\pi} = \frac{N^3}{P^2}$$

Donc aussi $\rho = \dfrac{D^2}{\pi}$.

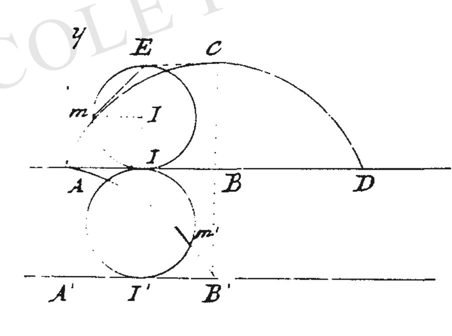
Cette expression remarquable est due à M. Charles Dupin.

Nous avons traité les deux applications que nous venons de faire par la méthode générale. Mais il est souvent plus simple de trouver la nature de la développée d'une courbe et la longueur de son rayon de courbure par des considérations particulières. Deux exemples suffiront à le montrer.

Pour le premier prenons la cycloïde.

Soit ACD une cycloïde décrite par un point d'une circonférence de rayon R roulant sur une droite AD, m

une des positions de ce point, I le contact avec AD de la position correspondante de la circonférence mobile. Par le milieu B de AD menons CBB' perpendiculaire à cette ligne et prenons-y BB' = 2R. Cela fait par le point B' ainsi déterminé conduisons A'B' parallèle à AB et soit B'A' une cycloïde égale à la première décrite à partir du point B' par le mouvement sur B'A' d'un cercle de rayon R. Enfin joignons mI et sur le prolongement de mI prenons m'I = mI.



Les deux triangles ImE, I'm'E sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, donc I'm'I est rectangle, et par suite la droite mm' est tangente en m' à une cycloïde qui serait produite par le roulement sur A'B' d'une circonférence de rayon R. De plus le point où cette cycloïde rencontre l'axe A'B' n'est autre que B', car l'arc I'm' est évidemment égal à l'arc mE et par là même à IB et I'B'.

Il résulte de là :

1°. que toute normale à la cycloïde ACD est tangente à la cycloïde AB' et que partant Am'B' est la développée de AmCD.

2°. Que le rayon de courbure en un point quelconque d'une pareille courbe est double de la normale au même point. C'est là ce que nous voulions trouver.

Pour second et dernier exemple, soit la spirale logarithmique représentée par l'équation $r = a^\theta$.

Appelons β l'angle que fait avec le rayon vecteur correspondant la tangente en un point (r, θ), nous aurons :

$$\text{tang.}\,\beta = r\frac{d\theta}{dr} = r\frac{d\theta}{r\,\log.a\,d\theta} = \frac{1}{\log.a}$$

Donc β est constant.

Cela posé, partons de la formule $\rho = \frac{ds}{d\alpha}$
comme $\alpha = \beta + \theta$, $d\alpha = d\theta$
D'ailleurs $ds = \sqrt{dr^2 + r\,d.\theta^2}$
Donc $\rho = \sqrt{r^2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$.

On reconnait dans cette expression de ρ celle de la longueur de la normale à la courbe au point (r, θ).

Ce théorème remarquable démontre que la développée de la spirale logarithmique, est une spirale logarithmique, ayant même origine qu'elle. Car elle prouve immédiatement que cette développée jouit de la propriété caracteristique des spirales logarithmiques, à savoir que sa tangente et le rayon vecteur du point de contact font un angle constant.

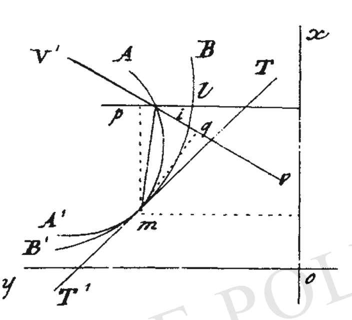
Contact des courbes planes.

On dit que deux courbes $y = f(x)$ et $y = F(x)$ ont en un point qui leur est commun un contact de l'ordre $\underline{n}$ quand toutes les dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, … jusqu'à $f^n(x)$ sont respectivement égales à toutes les dérivées $F'(x)$, $F''(x)$, ou jusqu'à $F^n(x)$, pour la valeur de $\underline{x}$ particulière à ce point.

Il résulte de cette définition une propriété remar-

-quable du système de deux courbes qui ont un contact de l'ordre n. Avant d'en donner l'énoncé et la démonstration observons que toutes les fois que deux courbes ont en un point un contact de quelqu'ordre, elles y ont nécessairement une tangente commune; cela est évident car pour la valeur de x particulière à ce point $f'(x)=F'(x)$.

Théorème. — Si deux courbes AA', BB' ont au point m un contact de l'ordre n, et qu'on coupe leur système par une droite non parallèle à leur tangente commune mT et à une distance h de leur contact; la portion de cette droite comprise entre les deux courbes sera infiniment petite de l'ordre $(n+1)$ par rapport à h.



Pour le démontrer soient $y=f(x)$, $y=F(x)$ les équations de ces deux courbes rapportées à deux axes rectangulaires ox, oy quelconque, x et y les coordonnées du point m. A une distance $mp=h$, du point m conduisons une parallèle $k.l$ à l'axe des y; en appelant k et k' les différences respectives $f(x+h)-f(x)$ et $F(x+h)-F(x)$, nous aurons évidemment, eu égard d'ailleurs aux conditions de l'énoncé, et supposant la formule de Taylor applicable à $f(x)$ et $F(x)$ autant que besoin sera:

$$k-k'=kl=\frac{h_1^{\,n+1}}{1.2\cdots(n+1)}\left[f^{n+1}(x)-F^{n+1}(x)\right]+\frac{h^{n+1}}{1.2\cdots(n+1)}\left[\varepsilon-\varepsilon_1\right] \quad (1)$$

Cela posé par le point k menons une ligne kiv dans une direction quelconque, et soit $mq=h$ la distance du point m à kiv. Nous aurons manifestement dans les triangles

infiniment petits Kil, pmx, qmk,

$$ki = Kl\,\frac{\sin Kli}{\sin Kil},\quad h_1 = mk\cos.pmk,\quad h = mk\cos.qmk.$$

Les rapports $\frac{\sin.Kli}{\sin.Kil}$ et $\frac{\cos pmk}{\cos.qmk}$ étant généralement déterminés on conclut de ces égalités que Ki et Kl sont en général infiniment petits du même ordre ainsi que h et h_1 ; mais la relation (1) prouve que Kl est infiniment petit de l'ordre $(n+1)$ par rapport à h_1. Donc Ki est infiniment petit du même ordre par rapport à h et par suite le théorème est démontré.

La considération de l'égalité (1) nous fait voir que $k-k'$ change de signe avec h_1 si $n+1$ est impair, et n'en change point au contraire si $n+1$ est pair. La conséquence immédiate de cette observation c'est que deux courbes se coupent ou non en même temps qu'elles se touchent en un point où elles ont un contact d'ordre supérieur, suivant que l'ordre de ce contact est pair ou impair.

Un problème qui se rattache naturellement à la question qui nous occupe est celui-ci :

Étant donné une courbe $y=f(x)$ et une équation $y=F(x,a,b,..)$ dans laquelle a, b, c, ... sont des constantes à déterminer, trouver les valeurs de ces constantes telle que la courbe $y=F(x,a,b,c...)$ ait avec $y=f(x)$ un contact de l'ordre $n+1$, au point (x,y).

La solution est immédiate.

Posons en effet les équations :

$$f(x) - F(x,a,b,c,\ldots\ldots) = 0$$
$$f'(x) - F'(x,a,b,c,\ldots\ldots) = 0.$$

(2) . . . .

$$f^{n-1}(x) - F^{n-1}(x, \alpha, b, c, \ldots) = 0$$
$$f^{n}(x) - F^{n}(x, \alpha, b, c, \ldots) = 0$$

et appelons m le nombre des constantes $\alpha, b, c, \ldots$.

Trois cas pourront se présenter.

1°. Si $m = n+1$, on pourra obtenir généralement pour ces constantes un nombre déterminé de systèmes de valeurs, et tout système complétement réel sera une solution de la question.

2°. Si $m > n+1$, on pourra généralement trouver une infinité de système de valeurs réelles des constantes vérifiant à la fois les équations (2) et par suite une infinité de solutions.

3°. Enfin si $m < n+1$. Il arrivera ordinairement que le problème soit impossible, car si on élimine $\alpha, b, c, \ldots\ldots$ entre les équations (2), il viendra $n+1-m$ relations

$A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, ...

lesquelles devront être satisfaites pour la valeur particulière attribuée à x.

Un cas intéressant de ce problème est celui où l'on voudrait déterminer les constantes α, b, c de l'équation $(x-\alpha)^2 + (y-b)^2 = c^2$ (3); de telle sorte que le cercle qu'elle représente ait avec la courbe $y = F(x)$ un contact du second ordre au point (x, y) pris sur elle.

Differentions deux fois l'équation (3) par rapport à x, nous aurons

$$x - \alpha + (y-b)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$
$$1 + (y-b)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Posons d'ailleurs $F'(x)=p$, $F''(x)=q$, pour nous conformer aux usages adoptés, les équations de condition entre a, b, c, seront

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$$

$$(x-a)+(y-b)p=0$$

$$1+(y-b)q+p^2=0$$

On reconnaît ici les équations qui serviraient à trouver les coordonnées $\underline{a}$, $\underline{b}$ du centre et le rayon $\underline{c}$ du cercle osculateur à $y=F(x)$ au point (x,y). De là ce théorème :

Le cercle osculateur en un point d'une courbe a avec elle en ce point un contact au moins du 2e. ordre.

Je dis au moins du second ordre car il pourrait fort bien arriver qu'à partir de celles du troisième ordre un certain nombre des dérivées relatives au cercle eussent leurs égales dans les dérivées de même ordre relatives à la courbe. Or, il est bien clair qu'alors le contact de la courbe et du cercle serait d'un degré supérieur au second.

La théorie précédente nous montre encore que le cercle osculateur coupe généralement la courbe par rapport à laquelle on le considère en même temps qu'il la touche, car il a ordinairement avec elle un contact d'ordre pair, le second.

Ici se placerait naturellement la démonstration d'une propriété notable du cercle de courbure en un point d'une ligne ; nous aimons mieux la considérer comme cas particulier du théorème plus général, par lequel nous terminerons la théorie du contact des courbes planes.

Théorème — Deux courbes qui ont un contact de l'ordre $\underline{n}$ peuvent être considérées comme ayant $\underline{n+1}$

points communs infiniment voisins.

Soient $y = f(x)$, $y = F(x)$ les équations de deux courbes. Les conditions necessaires et suffisantes pour que ces deux courbes aient $\underline{n+1}$ points communs sont données par les $(n+1)$ équations:

$$f(x) = F(x)$$
$$f(x+h) = F(x+h$$
$$f(x+\mu h) = F(x+\mu h) \quad (i)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(x+\nu h) = F(x+\nu h).$$

Par conséquent si nous pourons prouver que le système de ces $(n+1)$ equations peut être remplacé, lorsque h est infiniment petit par celui des $(n+1)$ équations

$$f(x) = F(x)$$
$$f'(x) = F'(x)$$
$$f''(x) = F''(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^n(x) = F^n(x)$$

le théorème sera démontré.

Or, considérons l'une quelconque des équations (i), la $(m+1)^e$. par exemple, $f(x+\lambda h) = F(x+\lambda h)$, et prouvons qu'elle peut être remplacée par une autre dont la limite pour $h=0$ est $f^m(x) = F^m(x)$, alors tout sera fini, c'est bien évident.

Pour y arriver, multiplions les $(m+1)$ premières des équations (i) respectivement par $A, B, C, \ldots K, I$, ajoutons les résultats ainsi obtenus, et divisons la somme par h^m; en admettant que $f(x+\delta h) = F(x+\delta h)$ soit la

$m^{\text{ème}}$, et convenant de faire :

$$P = f(x+\lambda h) + K f(x+\delta h) + \cdots + C f(x+\mu h) + B f(x+h) + A f(x)$$

$$Q = F(x+\lambda h) + K F(x+\delta h) + \cdots + C F(x+\mu h) + B F(x+h) + A F(x),$$

nous obtiendrons l'équation :

$$\frac{P}{h^m} = \frac{Q}{h^m} \quad (\alpha)$$

Et il est clair que substituée à la $(m+1)^{me}$ dans le système (i) elle donnera un nouveau système qui lui sera équivalent. Cela étant déterminons les coefficient $A, B, C, \ldots K$ par la condition de vérifier les m équations

$$1 + K + \cdots\cdots + C + B + A = 0$$

$$\lambda + K\delta + \cdots + C\mu + B = 0$$

$$\lambda^2 + K\delta^2 + \cdots + C\mu^2 + B = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda^{m-1} + K\delta^{m-1} + \cdots + C\mu^{m-1} + B = 0$$

Il est évident que P, Q, et leurs $(m-1)$ premières dérivées par rapport à h seront nulles pour $h=0$.

Mais alors l'équation (α) se réduisant à la forme $\frac{0}{0} = \frac{0}{0}$. Pour avoir sa véritable limite dans le cas de $h=0$, il suffira d'égaler entr'eux $\frac{\partial^m P}{\partial h^m}$ et $\frac{\partial^m Q}{\partial h^m}$ puisque d'ailleurs $\frac{\partial^m h^m}{\partial h^m}$ est une quantité constante, et de faire $h=0$ dans l'équation ainsi obtenue ;

D'autre part, il est facile de voir que :

$$\frac{\partial^m P}{\partial h^m} = \lambda^m f^m(x+\lambda h) + K\delta^m f^m(x+\delta h) + \cdots + C\mu^m f^m(x+\mu h) + B f^m(x+h)$$

$$\frac{\partial^m Q}{\partial h^m} = \lambda^m F^m(x+\lambda h) + K\delta^m F^m(x+\delta h) + \cdots + C\mu^m F^m(x+\mu h) + B F^m(x+h)$$

et que par suite pour $h=0$ ces expressions se réduisent respectivement à $T.f^m(x)$ et $T.F^m(x)$.

T désignant une quantité constante.

Donc $f^m(x) = F^m(x)$ est bien la limite de l'équation (2).

Donc le théorème est démontré.

Pour former l'équation (2) nous avons considéré les $(m+1)$ premières des équations (1), mais il est manifeste que c'est tout simplement pour fixer les idées, et que $(m+1)$ quelconques appartenant au système (1) auraient conduit au même résultat.

Dans le cas particulier où l'une des deux courbes est un cercle ce théorème général s'énonce comme il suit :

Le cercle osculateur en un point d'une courbe est la limite des cercles passant par ce point et deux autres pris sur la même courbe quand ces deux autres tendent indéfiniment à se réunir à lui.

Du Plan et du Cercle osculateur des courbes à double courbure.

On appelle plan osculateur en un point d'une courbe à double courbure la limite vers laquelle tend le plan qui passe par ce point et deux autres pris sur la même courbe, quand ces deux autres viennent se réunir à lui.

Il résulte immédiatement de cette définition que le plan osculateur en un point d'une ligne à double courbure a de commun avec elle ce point d'abord et deux autres encore infiniment voisins de lui.

En partant de cette propriété, cherchons l'équation du plan osculateur au point (x, y, z) de la courbe représentée

par les équations $F(x,y,z)=0$ $f(x,y,z)=0$.

Soient $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ les coordonnées d'un premier point infiniment voisin de (x,y,z), $x+dx+d(x+dx)$, $y+dy+d(y+dy)$ $z+dz+d(z+dz)$ ou $x+2dx+d^2x$, $y+2dy+d^2y$, $z+2dz+d^2z$, les coordonnées d'un second point aussi infiniment voisin de (x,y,z), les diverses différentielles qui y figurent étant d'ailleurs déterminées d'après les accroissemens égaux d'une variable quelconque, et de telle sorte que ces deux points appartiennent à la courbe considérée. Soit enfin :

$$Ax'+By'+Cz'+D=0,$$

l'équation cherchée.

La condition de passer par les trois points dont nous avons donné ci-dessus les coordonnées, assujétit ainsi qu'on le verra facilement les coefficiens A, B, C, D de cette équation aux trois conditions :

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

$$Adx+Bdy+Cdz=0$$

$$Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z=0$$

lesquelles déterminent les rapports de trois d'entre eux au quatrième et par là même le résultat demandé.

Le calcul ne présente aucune difficulté. L'équation qu'il fournit est la suivante :

$$(x'-x)(dy\,d^2z-dz\,d^2y)+(y-y')(dz\,d^2x-dx\,d^2z)+(z-z')(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0$$

On en déduit, au moyen des formules de la géométrie aux trois dimensions les sinus des angles qu'il fait avec trois axes rectangulaires auxquels nous supposerons notre courbe rapportée ; ce serait en posant :

$$P^2 = (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2.$$

Appelons d'ailleurs O le plan osculateur

$$\sin.(O,x) = \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{P}$$

$$\sin.(O,y) = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{P}$$

$$\sin.(O,z) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{P}$$

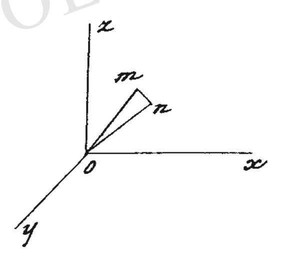
Ces formules non plus que l'équation du plan ne supposent absolument rien sur la qualité de la variable indépendante.

Le plan osculateur d'une courbe à double courbure étant le plan de trois points infiniment voisins pris sur elle, on peut concevoir dans ce plan par ces trois points un cercle et un cercle unique que nous appellerons cercle osculateur de la courbe.

Avant de donner les moyens de trouver son centre, la direction du rayon qui joindra ce centre à son point de contact avec la courbe, c'est-à dire la direction du rayon de courbure, et l'expression de la longueur de ce rayon. Parlons de ce qu'on nomme angle de contingence d'une ligne à double courbure. On appelle ainsi l'angle de deux tangentes infiniment voisines.

D'après cela rien de plus simple que de trouver son expression. Soient en effet $\cos.\alpha$, $\cos.\beta$, $\cos.\gamma$ les cosinus des angles formés par une tangente à la courbe considérée avec les trois axes ; $\cos\alpha + d\cos.\alpha$, $\cos.\beta + d\cos.\beta$, $\cos.\gamma + d\cos\gamma$ ceux des angles d'une tangente infiniment voisine de la première, respectivement avec les trois mêmes axes ; par

l'origine des coordonnées menons des parallèles à ces deux tangentes et prenons sur chacune une longueur égale à l'unité. Soit omn le triangle ainsi formé. Les coordonnées du point m seront évidemment $\cos.\alpha$, $\cos.\beta$, $\cos.\gamma$; celles du point n, $\cos.\alpha + d\cos.\alpha$, $\cos.\beta + d\cos.\beta$, $\cos.\gamma + d\cos.\gamma$. Par suite $(d\cos.\alpha)^2 + (d\cos.\beta)^2 + (d\cos.\gamma)^2$, sera l'expression de $\overline{mn}^2$. Or, appelons ε l'arc qui mesure l'angle de contingence dans un cercle de rayon égal à l'unité, nous aurons manifestement $\varepsilon = mn$, car l'angle mon est supposé infiniment petit. Donc



$$\varepsilon = \sqrt{(d\cos.\alpha)^2 + (d\cos.\beta)^2 + (d\cos.\gamma)^2},$$

c'est la formule que nous cherchions.

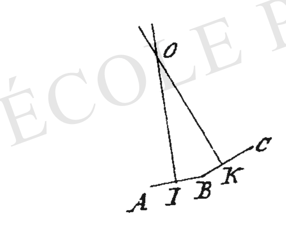
Pour obtenir maintenant la direction du rayon de courbure, nous pourrions le considérer comme l'intersection du plan osculateur et du plan normal au point considéré. Mais il est plus simple d'observer que la ligne mn est parallèle à cette direction. Or les projections de mn sur ox, oy, oz, sont en vertu des notations adoptées, $d\cos.\alpha$, $d\cos.\beta$, $d\cos.\gamma$, donc si nous désignons par λ, μ, ν, les angles de la direction inconnue avec les axes respectifs ox, oy, oz. Il nous viendra

$$\cos\lambda = \frac{d\cos.\alpha}{\varepsilon}, \cos.\mu = \frac{d\cos\beta}{\varepsilon}, \cos.\gamma = \frac{d\cos\gamma}{\varepsilon}$$

égalités qui résolvent le problème.

Arrivons enfin à la recherche de la longueur même du rayon de courbure. Considérons pour cela

deux élémens consécutifs AB, BC pris sur elle. Ces deux



élémens déterminent un plan qui lui est osculateur et l'intersection O des plans normaux à ces élémens avec ce plan osculateur est le centre de courbure correspondant. Mais l'angle IOK des deux plans normaux en question est précisément égal à l'angle des deux élémens AB, BC qui n'est autre que ce que nous avons appelé ε; par conséquent, si nous appelons ds l'élément IBK de notre courbe, ρ le rayon de courbure y relatif, il viendra :

$$\rho = \frac{ds}{\varepsilon}$$

Nous connaissons les expressions de ds et ε, donc celle de ρ est par suite connue.

Il ne nous manque plus maintenant aucun des élémens du cercle osculateur en un point d'une courbe à double courbure. La recherche de ses équations même n'est plus qu'une affaire de calcul. Nous n'y insisterons pas davantage.

Terminons ce chapitre par l'application des théories précédentes à l'hélice.

On sait qu'on désigne sous ce nom une courbe tracée sur un cylindre droit et telle que l'inclinaison de sa tangente sur le plan de la base du cylindre est constante.

Désignons par a, le rayon de la base du cylindre, m la tangente de l'inclinaison constante par laquelle nous avons défini la courbe; prenons d'ailleurs le plan de la base pour plan des x, y, l'axe du cylindre pour axe des z et supposons enfin que nous déterminions notre système de coordonnées

rectangulaires par la condition que l'axe des x rencontre la courbe.

Les équations des trois projections de l'hélice seront

$$x = a\cos.\frac{z}{mn};\ y = a\ \sin.\frac{z}{mn},\ x^2+y^2=a^2.$$

En admettant qu'elle s'élève en tournant de l'axe des x positifs vers l'axe des y positifs.

Ces équations différentiées donnent :

$$dx = -\frac{1}{m}\sin\frac{z}{ma}dz,\ dy = \frac{1}{m}\cos.\frac{z}{ma}dz,\ ds = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}dz$$

$$d^2x = -\frac{1}{m^2a}\cos\frac{z}{ma}dz^2,\ d^2y = -\frac{1}{m^2a}\sin\frac{z}{ma}dz^2,\ ds = 0.$$

en prenant z pour variable indépendante.

Cela étant considérons un point (x, y, z) sur le centre, savoir α, β, γ, les angles avec les trois axes des x, y, z, nous aurons $\cos.\alpha = \frac{dx}{ds}\ \cos.\beta = \frac{dy}{ds}\ \cos.\gamma = \frac{dz}{ds}.$

Et par suite le plan osculateur, l'angle de contingence et le rayon de courbure y relatif seront déterminés par les équations :

$$z'-z = -mx'\sin\frac{z}{ma} + my'\cos.\frac{z}{ma}$$

$$\varepsilon = \frac{dz}{am\sqrt{1+m^2}}$$

$$\rho = a\ (1+m^2)$$

La dernière seule est remarquable, elle prouve que dans l'hélice la longueur du rayon de courbure est constante.

Quant à sa direction une simple substitution nous la fournit également. En conservant ici les notations

adoptées dans l'exposé de la méthode générale, il vient :

$$\cos.\lambda = -\frac{\cos.\frac{z}{ma}}{a(1+m^2)}, \quad \cos.\mu = -\frac{\sin.\frac{z}{ma}}{a(1+m^2)}, \quad \cos.\nu = 0.$$

Concluons-en que son rayon de courbure dans une hélice est parallèle au plan de la base du cylindre à qui elle appartient.

Des Développées des courbes à double courbure.

Nous avons donné précédemment la définition et la théorie des développées des courbes planes. Nous en avons déduit la manière d'engendrer une développante au moyen de sa développée.

Voici la généralisation de cette propriété étendue par définition à des lignes quelconques.

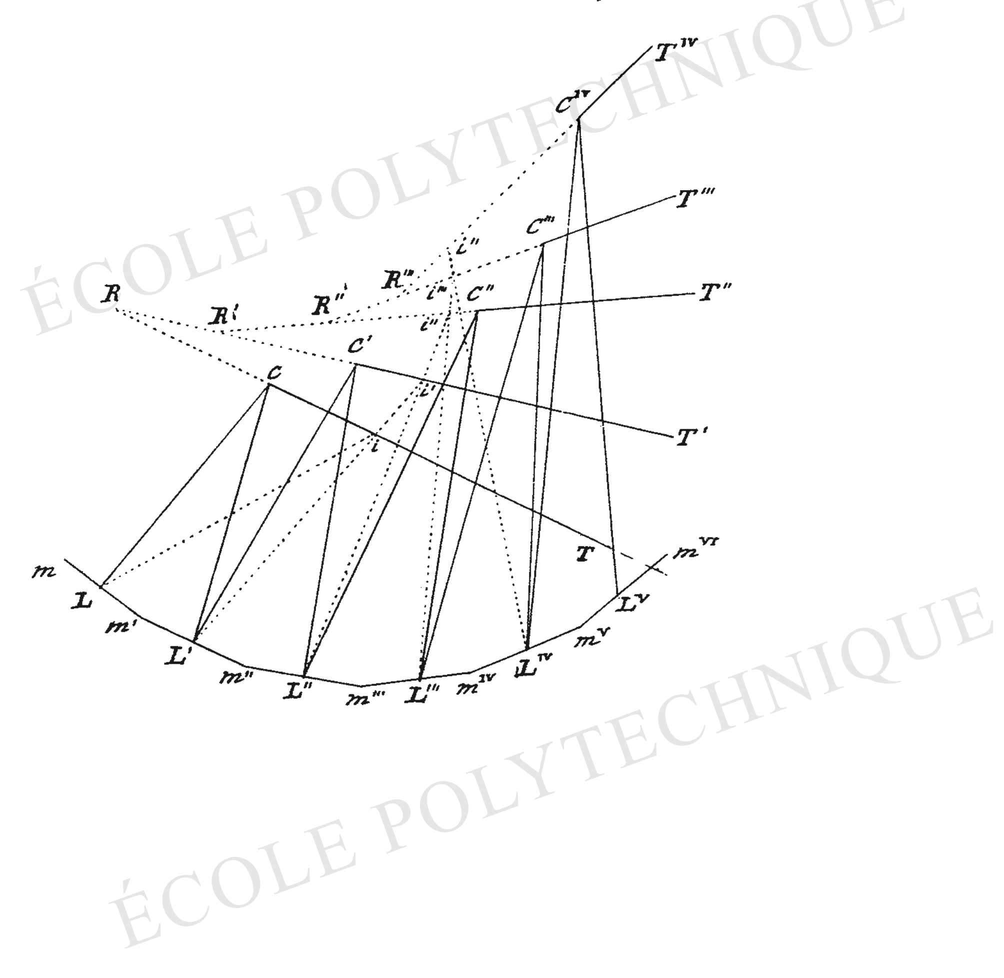
Le lieu A des diverses positions d'un point pris sur une droite qui roule en restant constamment tangente à une ligne quelconque B est dit la développante de cette ligne. Réciproquement B s'appelle alors la développée de A.

En partant de cette définition, et en considérant une courbe comme un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits. Nous allons établir un important théorème qui constitue presqu'à lui seul la théorie des développées des courbes à double courbure.

Théorème — Toute courbe a une infinité de développées ; Toutes les développées d'une même ligne appartiennent à une même surface développable.

Soit $m\,m'\,m''\,m'''\,m^{IV}\,m^{V}\,m^{VI}$... une courbe. Concevons-la découpée en élémens infiniment petits
$m\,m'$, $m'm''$, $m''m'''$, $m'''m^{IV}$, $m^{IV}m^{V}$, ... contigus, et appelons respectivement N, N', N'', N''', ... les plans normaux à ces élémens.

De plus soient LC et $L'C'$, $L'C'$, $L'C'$ et $L''C'$, $L''C''$ et $L'''C''$, ... les intersections respectives de N et N' avec $m\,m'm''$, N' et N'' avec $m'\,m''\,m'''$, N'' et N''' avec $m''\,m'''\,m^{IV}$, ... Enfin admettons que CT, $C'T'$, $C''T''$, ... représentent par ordre les intersections de N avec N', N' avec N'', N'' avec N''', ...



Il est clair que deux quelconques consécutives des droites CT, C'T', C''T'', ... sont dans un même plan, car C'T' et C''T'' par exemple appartiennent toutes deux au plan N''. Par suite le lieu qu'elles constituent est une surface développable dont la courbe R, R'R''R''', ... formée par leurs intersections deux à deux est l'arête de rebroussement.

Cela étant, prenons un point quelconque i sur l'une d'elles CT, joignons iL et iL'; la ligne iL' étant située dans le plan N' rencontrera C'T' en i'; joignons i'L''; cette droite rencontrera C''T'' en i'' par une raison analogue à celle qui fait que iL' rencontre C'T'; joignons de même i''L''', ... Les points i, i', i'', i''', ... ainsi déterminés formeront une certaine courbe située toute entière sur la surface développable dont nous avons parlé. Et je dis que c'est une développée de la courbe mm'm''m''', ...

En effet, les droites i'iL', i''i'L'', i'''i''L''', ... sont toutes évidemment tangentes à la courbe formée par les points i, i', i'', ... Or le point i' est à égale distance de tous les points de l'arc de courbe L'm''L''. Donc quand nous ferons tourner la tangente i'iL' autour du point i pour l'amener à se confondre avec i''i'L'', c'est-à-dire pour lui faire prendre une position infiniment voisine, le point L' de cette tangente décrira l'arc L'm''L'' pour venir se placer en L''. De même, le point i'' étant également distant de tous les points de l'arc L''m'''L''', quand la tangente i'L' vient en i''L'' tournera autour du point i'' pour prendre une position infiniment voisine i'''L''', le point L' venu en L'' décrira l'arc L''m'''L'''; et ainsi de suite. Il résulte de là que la courbe mm'm''m'''.. peut être engendrée par un point L' d'une droite qui

roulerait sur la courbe $i\,i'\,i'', i'''$ . . . en lui restant constamment tangente; cela suffit pour affirmer que $i\,i'\,i''\,i'''$. . . . est une développée de $m\,m'\,m''\,m'''$. . . . . .
Mais maintenant si au lieu de prendre le point i sur CT nous eussions pris un autre point quelconque sur la même ligne, nous aurions eu une nouvelle développée de la courbe considérée.

Donc le théorème est démontré.

Il est important de remarquer, ce qui d'ailleurs est évident à l'inspection de la figure et d'après la manière dont on obtient une développée, que le lieu des centres de courbure C, C', C'', C'''. . . de la ligne $m\,m'\,m''\,m'''$. . n'est pas une de ses développées.

Si l'on considère une courbe plane comme un cas particulier d'une courbe à double courbure, on reconnait en appliquant le théorème que, toute courbe plane a une infinité de développées lesquelles sont toutes situées sur un cylindre droit ayant pour base le lieu de ses centres de courbure, c'est-à-dire sa développée plane.

Un cas particulier remarquable est celui où la courbe $m\,m'\,m''\,m'''$. . . . serait plane et précisément la Spirale développante du cercle, car alors toutes les développées sont des hélices situées sur un cylindre circulaire droit.

Des Points singuliers des courbes planes.

On désigne en général sous le nom de points singuliers dans les courbes des points qui jouissent de propriétés remarquables.

Nous avons déjà parlé des points où l'ordonnée est maximum ou minimum, ainsi que des points d'inflexion. Ajoutons quelques mots sur les points multiples, conjugués, saillans, et sur les points d'arrêt et de rebroussement.

1° Points multiples — On appelle ainsi ceux où passent plusieurs branches de courbe, et où l'on peut mener par conséquent plusieurs tangentes.

On peut les déterminer par des règles très simples pour toutes les courbes algébriques.

Soit $F(x,y)=0$ une équation algébrique rationnelle. On en tire

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=0$$

Or, cette équation devant être satisfaite par plusieurs valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$ tandis que $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ n'en auraient qu'une seule, on devra avoir $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, conjointement avec $F(x,y)=0$. Si l'on trouve des solutions réelles communes à ces équations, les valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$ seront données par l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

Si cependant trois branches passaient au même point les coefficients de cette équation seraient encore nuls et l'on aurait recours à la troisième dérivée de l'équation $F(x,y)=0$. Et ainsi de suite. Si deux valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$ étaient égales, les deux branches seraient tangentes.

Dans le cas particulier où l'équation de la courbe est résolue par rapport à y et renferme des radicaux à double signe, on reconnaîtra les points multiples en cherchant les valeurs de x qui font disparaître un de ces radicaux de la valeur de y sans les faire disparaître de l'expression de $\frac{dy}{dx}$, car les deux branches seront réunies en un point ayant une pareille abscisse et leurs tangentes y seront différentes.

Exemple de point multiple : $y^3 - 3axy + x^3 = 0$.
Deux branches de cette courbe se croisent à l'origine.

2°. Points de rebroussement. Si en un point multiple deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont égales, et que les deux branches correspondantes s'arrêtent en ce point, il y a ce qu'on appelle rebroussement. Il est du premier genre quand les deux branches sont de cotés différens de la tangente commune, et du second quand elles sont du même côté.

Pour reconnaître que les branches s'arrêtent en ce point on verra si, en faisant varier x d'un côté seulement, leurs ordonnées deviendront imaginaires. D'ailleurs le rebroussement sera du premier genre quand $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera de signe différent pour les deux branches ; il sera au contraire du second quand le signe sera le même.

Exemple de rebroussement : $y = \varphi(x) + (x-a)^{\frac{2p+1}{2q}} F(x)$

Cette courbe a un rebroussement du premier genre si $\frac{2p+1}{2q}$ est compris entre 1 et 2, et un rebroussement du

second genre si $\frac{2p+1}{2q}$ est plus grand que 2 si toutefois pour le point de rebroussement $\varphi''(x) \gtrless 0$.

3° Points conjugués. On appelle ainsi des points isolés dont les coordonnées satisfont à l'équation d'une courbe sans qu'on en puisse supprimer ces solutions. Pour ces points dy et par suite $\frac{dy}{dx}$ doit être imaginaire. C'est à ce caractère qu'on les reconnaîtra.

On peut observer que $\frac{dy}{dx}$ tiré d'une équation du premier degré ne saurait être imaginaire tant que les coefficiens de cette équation sont réels; par conséquent les coordonnées des points conjugués satisferont aux équations

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

On les trouvera donc en même temps que les points multiples.

Exemple de points conjugué: $y=(x-a)\sqrt{x-b}$ dans le cas où b est plus grand que a, le point $y=0$, $x=a$ de cette courbe est conjugué.

4°. Points d'arrêt — On donne ce nom à tout point où s'arrête brusquement une branche unique de courbe. On les déterminera en cherchant les valeurs de x à partir desquelles y commence à passer du réel à l'imaginaire ou de l'imaginaire au réel. Mais quand on aura trouvé un point satisfaisant à cette condition, il faudra de plus s'assurer qu'il n'y a qu'une seule branche de courbe qui y passe, c'est-à-dire que les valeurs voisines de x ne donnent pas plusieurs valeurs voisines pour y.

Exemple de point d'arrêt $y = \frac{1}{\log. x}$, $y = x \log. x$.

Chacune de ses deux courbes a un point d'arrêt à l'origine.

5°. Points saillans — On appelle ainsi les points où s'arrêtent à la fois deux branches d'une courbe sans y avoir la même tangente. Ils rentrent dans la classe des points multiples. On les distinguera parmi eux à ce que les ordonnées des deux branches deviendront toutes deux imaginaires d'un côté ou de l'autre de ce point, si toutefois les deux branches sont données par des équations distinctes.

Il résulte de là que quand l'équation d'une courbe ne donne qu'une seule valeur de y pour chaque valeur de x, toute valeur de x qui donnera deux valeurs pour $\frac{dy}{dx}$ déterminera un point saillant.

Exemple de point saillant $y = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

L'origine des coordonnées auxquelles cette courbe est rapportée en est un point saillant.

Fin du Calcul Différentiel.